АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 2 СЕНТЯБРЬ, 1966 ВЫПУСК 3

ДИФФУЗНОЕ ОТРАЖЕНИЕ ОТ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЫ

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

Поступила 30 июня 1966

Рассматривается задача диффузного отражения излучения от нестационарного плоско-параллельного слоя. Применяется принцип инвариантности Амбарцумяна. Решение полученного уравнения сводится к решению функционального уравнения (5) и обращению преобразования Лапласа. Находится решение уравнения (5) в классе асимптотических степенных рядов, после чего обращение преобразования Лапласа делается автоматически.

В статье [1] И. Н. Мининым рассмотрена нестационарная задача диффузии излучения в одномерной полубесконечной среде, для случая, когда оптическая глубина каждой точки меняется со временем по экспоненциальному закону. В той же статье дается физическая трактовка этой модели. Применяя принцип инвариантности Амбарцумяна, можно получить уравнение для аналогичной трехмерной задачи (учитывая также конечность скорости света) и одномерной задачи в случае несимметричной индикатрисы, также учитывая конечность скорости света.

Пусть оптические глубины точки полубесконечного плоско-параллельного слоя в моменты t и t' связаны соотношением:

$$\tau(t') = \tau(t)\, e^{\gamma(t'-t)}.$$

Дальнейшие предположения следующие: поглощенный квант спонтанно излучается по экспоненциальному закону $\alpha e^{-\beta t}$, где $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda \leqslant 1$; $dt = \frac{ds}{v}$, dt — время, v — скорость прохождения квантом единичной оптической длины в момент $t=0$. Индикатриса рассеяния предполагается сферической.

Пусть в момент $t=0$ на среду падает один квант. Обозначим через ζ косинус угла падения, через $\rho_1(t, \eta, \zeta)$ плотность вероятности диффузного отражения кванта в момент t под углом $\arccos \eta$. На основании принципа инвариантности получается следующее уравнение для функции

$$\rho(t, \eta, \zeta) = \frac{1}{\pi\zeta} \rho_1(t, \eta, \zeta):$$

$$\left(\frac{e^{\gamma t}}{\eta} + \frac{1}{\zeta}\right)\rho + \frac{1}{v}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\zeta}\right)\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\alpha}{4\eta\zeta} e^{-\beta t} +$$

$$+ \frac{\alpha}{2\zeta}\int_0^1 d\eta' \int_0^t \rho(x, \eta, \eta') e^{-\beta(t-x)} dx + \frac{\alpha}{2\eta}\int_0^1 d\eta' \int_0^t \rho(x, \eta', \zeta) e^{-\beta(t-x)} e^{\gamma x} dx +$$

$$+ \alpha \int_0^1 d\eta'' \int_0^t \rho(x, \eta, \eta'') dx \int_0^1 d\eta' \int_0^{t-x} \rho(y, \eta', \zeta) e^{-\beta(t-x-y)} e^{\gamma y} dy; \quad (1)$$

с условием

$$\rho(0, \eta, \zeta) = 0. \quad (2)$$

Обозначим

$$\Omega(s, \eta, \zeta) = L_t[\rho(t, \eta, \zeta) e^{\beta t}]. \quad (3)$$

L_t — оператор преобразования Лапласа.

Используя условие (2), относительно функции $\Omega(s, \eta, \zeta)$ получим следующее функциональное уравнение:

$$\left[\eta + \frac{s}{v}(\eta + \zeta) - \frac{\beta}{v}(\eta + \zeta)\right]\Omega(s, \eta, \zeta) + \zeta\Omega(s-\gamma, \eta, \zeta) =$$

$$= \frac{\alpha}{4s}\left[1 + 2\eta\int_0^1 \Omega(s, \eta, \eta') d\eta'\right]\left[1 + 2\zeta\int_0^1 \Omega(s-\gamma, \eta', \zeta) d\eta'\right]. \quad (4)$$

В случае $v = \infty$ уравнение (4) примет следующий вид:

$$\eta\Omega(s, \eta; \zeta) + \zeta\Omega(s-\gamma, \eta, \zeta) = \frac{\alpha}{4s}\left[1 + 2\eta\int_0^1 \Omega(s, \eta, \eta') d\eta'\right] \times$$

$$\times \left[1 + 2\zeta\int_0^1 \Omega(s-\gamma, \eta', \zeta) d\eta'\right]. \quad (5)$$

В аналогичном одномерном случае получается следующее функциональное уравнение:

$$\Omega(s) + \Omega(s-\gamma) = \frac{a}{s}\Big[b + a\,\Omega(s) + a\,\Omega(s-\gamma) + b\,\Omega(s)\,\Omega(s-\gamma)\Big], \quad (5')$$

где a и $b = 1 - a$ вероятности излучения поглощенного кванта соответственно вперед и назад.

Ищем решение уравнения (5) в виде ряда Лорана по s. Такое разложение использовано также в [2]

$$\Omega(s, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k(\eta, \zeta)}{s^k}. \quad (6)$$

Целесообразность разложения (6) обусловлена тем, что обращение преобразования Лапласа делается автоматически. Относительно коэффициентов получается простое рекуррентное соотношение. Среди многих решений уравнения (5) выделяется то, которое необходимо для нахождения решения физической задачи. Легко убедиться, что уравнение (5), как и (5′), не имеет единственного решения. Действительно, это уравнение устанавливает только связь между значениями функции Ω в точках $s-\gamma$ и s. Так что функцию Ω можно в любом отрезке $(s_0, s_0+\gamma)$ задать произвольным образом, а потом продолжить по данному закону. Для обеспечения единственности решения нужно наложить определенные дополнительные условия на гладкость функции или на ее поведение в бесконечности, то есть искать решение в определенном классе функций.

Ниже мы покажем, что в классе асимптотических степенных рядов уравнение (5) имеет единственное решение (относительно коэффициентов ω_k получается рекуррентное соотношение, откуда они однозначно определяются).

Требование разложимости функции Ω в асимптотический степенной ряд согласуется с условием существования предела $\lim\limits_{x\to\infty} x f(x)$, использованным в статье [1].

Разложение аналогичное (6) для $\Omega(s-\gamma, \eta, \zeta)$ будет:

$$\Omega(s-\gamma, \eta, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k(\eta, \zeta)}{(s-\gamma)^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{\omega}_k(\eta, \zeta)}{s^k}, \quad (7)$$

где

$$\overline{\omega}_k(\eta, \zeta) = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^{m}\,\omega_{m+1}\,\gamma^{k-m-1}. \quad (8)$$

Правую часть (8) можно переписать в более компактной форме:

$$\overline{\omega}_k(\eta, \zeta) = [\omega(\omega + \gamma)^{k-1}]\downarrow. \tag{8'}$$

Стрелка означает, что после раскрытия выражения внутри квадратной скобки нужно каждую степень при ω заменить тем же индексом — $\omega^m \to \omega_m$.

Вторую часть равенства (7) можно доказать, используя разложение

$$\varphi(s) \equiv \frac{1}{s-\gamma} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m}{s^{m+1}} \qquad (\text{при } s > \gamma)$$

$$\varphi^{(p-1)}(s) = (-1)^{p-1}(p-1)!\,\frac{1}{(s-\gamma)^p};$$

откуда

$$\frac{1}{(s-\gamma)^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(s) =$$

$$= \frac{1}{(p-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\cdots(m+p-1)\,\frac{\gamma^m}{s^{m+p}} = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+p-1}^{p-1}\,\frac{\gamma^m}{s^{m+p}} =$$

$$= \sum_{k=p}^{\infty} C_{k-1}^{p-1}\,\frac{\gamma^{k-p}}{s^k},$$

после чего легко получается нужное.

Подставляя (6) и (7) в (5), получим рекуррентное соотношение относительно коэффициентов ω_n и $\overline{\omega}_n$.

$$\eta\omega_n(\eta, \zeta) + \zeta\overline{\omega}_n(\eta, \zeta) = \frac{\alpha}{2}\Bigg[\eta\int_0^1 \omega_{n-1}(\eta, \eta')\,d\eta' +$$

$$+ \zeta\int_0^1 \overline{\omega}_{n-1}(\eta', \zeta)\,d\eta' + 2\eta\zeta\sum_{k=1}^{n-2}\int_0^1 \omega_k(\eta, \eta')\,d\eta'\int_0^1 \overline{\omega}_{n-k-1}(\eta', \zeta)\,d\eta'\Bigg] \tag{9}$$

и

$$\omega_1(\eta, \zeta) = \frac{\alpha}{4(\eta+\zeta)}.$$

Ряд (6) с коэффициентами, определяемыми соотношениями (8) и (9), может расходиться при всех конечных значениях s. Тем не менее, этот ряд имеет определенную сумму, удовлетворяющую уравнению (5). Действительно, ряд

$$Q(t, \eta, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(\eta, \zeta)}{n!} t^n \tag{10}$$

сходится (в силу появления в знаменателе коэффициентов $n!$). Функция

$$\Omega_0(s, \eta, \zeta) = L_t\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n t^n}{n!}\right] \tag{11}$$

удовлетворяет уравнению (5), а (6) представляет собой его разложение в асимптотический степенной ряд. (Об асимптотических разложениях см., например, в [3]).

Можно также непосредственной подстановкой убедиться, что функция $\rho = e^{-\beta t} Q(t, \eta, \zeta)$ удовлетворяет уравнению (1) в случае $v = \infty$.

В одномерном случае можно поступить аналогично.

В заключение выражаю благодарность академику В. А. Амбарцумяну за руководство.

Институт математики и механики
АН АрмССР

THE DIFFUSE REFLECTION FROM A NON-STEADY MEDIUM

N. B. YENGIBARIAN

A problem of diffuse reflection of radiation from non-steady semi infinite three dimentional medium is considered. The equation (1) is obtained with the help of the invariance principle.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. Н. Минин*, Астрофизика, 1, 173, 1955.
2. *Н. Б. Енгибарян*, Астрофизика, 2, 197, 1966.
3. *А. Эрдейи*, Асимптотические разложения, М., 1962.