АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 17 НОЯБРЬ, 1981 ВЫПУСК 4

УДК 533.951

ЖЕЛОБКОВАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПЛАЗМЫ

Т. Д. КАЛАДЗЕ, А. Б. МИХАЙЛОВСКИЙ

Поступила 17 ноября 1980

Теоретически исследуется желобковая неустойчивость релятивистской плазмы, что представляет интерес для теории скачкообразной эжекции частиц из пульсаров. Найдены границы неустойчивости и вычислен инкремент возмущений для плазмы с произвольным релятивистским фактором. Показано, что при любом релятивистском факторе (в том числе при $T \gg mc^2$) давление плазмы, устойчиво удерживаемой в криволинейном магнитном поле, не может существенно превышать давление магнитного поля ($\beta \lesssim 1$). Установлено, что в ультрарелятивистском пределе характерный инкремент неустойчивости имеет тот же порядок величины, что и в случае слаборелятивистской плазмы.

1. *Введение.* В последние годы интенсивно изучаются высокочастотные неустойчивости релятивистской плазмы, что особенно стимулируется попытками связать с ними наблюдаемое радиоизлучение пульсаров (см. библиографию в работе [1]). Вместе с тем астрофизики, занимающиеся проблемой пульсаров, проявляют интерес также к низкочастотным неустойчивостям, полагая, что такие неустойчивости могут быть ответственны за скачкообразную эжекцию плазмы из магнитосферы пульсара [2—4]. В [2, 3] не конкретизировалось, о какой именно неустойчивости идет речь, а в [4] анализировалась желобковая неустойчивость.

Напомним, что желобковая неустойчивость — это неустойчивость гидродинамического типа, обусловленная градиентом давления плазмы и кривизной силовых линий магнитного поля. Ранее эта неустойчивость исследовалась довольно подробно (см., например, главы 6, 8, 9 и часть II книги [5] и указанную там литературу). Следует, однако, иметь в виду, что отмеченные здесь работы были ориентированы в основном на приложения к лабораторным экспериментам с нерелятивистской плазмой. Нерелятивистская теория использовалась и в работе [4]. С другой сторны, по существующим представлениям [6, 7], пульсарная плазма является релятивистской. Поэтому для дальнейшего выяснения роли желобковой неустойчивости в проблеме пульсаров необходимо развитие релятивистской теории этой неустойчивости. Этой цели и служит настоящая работа.

При выводе дисперсионного уравнения для желобковой неустойчивости релятивистской плазмы будем следовать кинетическому подходу, а получающиеся конкретные результаты разъясним на языке гидродинамики.

Для простоты изложения ограничимся приближением продольно-однородного магнитного поля постоянной кривизны, а распределение частиц по импульсам будем считать изотропным. Кинетический подход к проблеме низкочастотных неустойчивостей плазмы в магнитном поле постоянной кривизны развивался вначале в работах [8, 9] (см. также [10]), а затем в [11].

2. *Дисперсионное уравнение.* Если плазма не слишком разрежена (или если поперечные волновые числа достаточно малы), то, как отмечалось в [12], при исследовании желобковой неустойчивости можно использовать приближение бесконечной проводимости плазмы вдоль силовых линий магнитного поля. Согласно [11], в этом приближении дисперсионное уравнение сводится к виду

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} - N^2\cos^2\vartheta & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - N^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Здесь $N^2 = k^2c^2/\omega^2$ — квадрат показателя преломления, k, ω — полное волновое число и частота колебаний, $\cos\vartheta = k_\parallel/k$, $k_\parallel$ — продольное волновое число ($k_\parallel \ll k$), $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты тензора диэлектрической проницаемости, модифицированного эффектами неоднородности плазмы и магнитного поля. Способ вычисления величин $\varepsilon_{\alpha\beta}$ указан в [11], там же приведены выражения для этих величин в случае нерелятивистской плазмы. Действуя по аналогии с [11], находим, что в интересующем нас случае релятивистской плазмы и в пренебрежении дрейфовыми эффектами выражения для компонентов $\varepsilon_{\alpha\beta}$, входящих в (1), имеют вид

$$\varepsilon_{11} = 1 - \frac{4\pi c^2}{B^2}\sum_j m\left\langle \frac{w_\perp^2}{2}\frac{\partial F}{\partial\gamma} - \frac{k_y^2}{k_\perp^2}\frac{c^2}{\omega^2 R\gamma}\left(w_\parallel^2 + \frac{w_\perp^2}{2}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\omega}{\omega - k_\parallel v_\parallel}\frac{1}{R\gamma}\left(w_\parallel^2 + \frac{w_\perp^2}{2}\right)\frac{\partial F}{\partial\gamma}\right]\right\rangle,$$

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -i\frac{2\pi k_y c^4}{B^2 R\omega}\sum_j m\left\langle\frac{1}{\omega - k_\parallel v_\parallel}\frac{w_\perp^2}{\gamma^2}\left(w_\parallel^2 + \frac{w_\perp^2}{2}\right)\frac{\partial F}{\partial\gamma}\right\rangle, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\pi k_\perp^2 c^4}{B^2 \omega} \sum_j m \left\langle \frac{1}{\omega - k_\parallel v_\parallel} \frac{w_\perp^4}{\gamma^2} \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right\rangle.$$

Здесь суммирование производится по сортам частиц, B — равновесное магнитное поле, R — радиус кривизны силовых линий, x — координата в направлении неоднородности плазмы, k_y — волновое число в направлении поперек магнитного поля и неоднородности плазмы, m — масса покоя частиц, $F = F(\gamma, x)$ — их равновесная функция распределения, нормированная условием $\langle F \rangle = n$, где n — плотность соответствующего сорта частиц.

$$\langle \cdots \rangle = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^\infty (\cdots)\, w^2 \mathrm{d}w, \tag{3}$$

$\varphi = \operatorname{arc\,tg}(w_\perp / w_\parallel)$, $w = (w_\parallel^2 + w_\perp^2)^{1/2}$, а остальные символы означают то же, что и в работе [1], а именно: $\gamma = (1 + w^2)^{1/2}$ — релятивистский фактор частиц, $v_\parallel = w_\parallel c/\gamma$ — продольная скорость частиц, $w_\perp = p_\perp / mc$, $w_\parallel = p_\parallel / mc$; $p_\parallel$, $p_\perp$ — продольный импульс и модуль поперечного импульса частиц.

В дальнейшем будем считать функцию F максвелловской, так что (ср с [1, 13])

$$F = \frac{n\alpha}{K_2(\alpha)} \exp(-\alpha\gamma), \tag{4}$$

где $\alpha = mc^2/T$, T — температура плазмы, K_2 — функция Макдональда. Будем по отдельности рассматривать возмущения с $k_\parallel = 0$ (чисто желобковые) и с $|\omega| \ll k_\parallel v_\parallel$ (косые волны). При $k_\parallel = 0$ и F вида (4) из (2) следует

$$\varepsilon_{11} = 1 + \frac{4\pi c^2}{B^2} \sum_j \left[wn\lambda_1 + \frac{2}{R} \left(\frac{k_y}{k_\perp \omega} \right)^2 \left(\frac{dP_j}{dx} - \frac{7}{2} \frac{P_j}{R} \lambda_2 \right) \right],$$

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = i \frac{12\pi c^2}{B^2} \frac{k_y}{\omega^2 R} \sum_j P_j \lambda_2, \tag{5}$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{8\pi c^2}{B^2} \frac{k_\perp^2}{\omega^2} \sum_j P_j \lambda_2.$$

Здесь $P_j = n_j T_j$ — равновесное давление j-го сорта частиц (у остальных величин, зависящих от сорта частиц, индекс j для простоты не пишем)

$$\lambda_1 = K_3(\alpha)/K_2(\alpha),$$
$$\lambda_2 = \frac{\alpha^3}{K_2(\alpha)} \int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{K_3(t)}{t^3}\, dt, \tag{6}$$

K_3, как и K_2 — функция Макдональда. В другом предельном случае, т. е. при $|\omega| \ll k_\parallel v_\parallel$, вместо (5) из (2), (4) имеем

$$\varepsilon_{11} = 1 + \frac{4\pi c^2}{B^2} \sum_j \left[mn\lambda_1 + \frac{2}{R} \left(\frac{k_y}{k_\perp \omega}\right)^2 \frac{dP_j}{dx} \right],$$
$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = 0. \tag{7}$$

Заметим, что член с λ_1 в (5), (7) описывает поперечную инерцию плазмы, а члены с λ_2 сжимаемость плазмы. Члены с λ_2 в (7) отсутствуют. Это означает, что в косых возмущениях плазма ведет себя как несжимаемая жидкость вне зависимости от величины ее релятивистского фактора.

В предельном случае нерелятивистской плазмы $(\alpha \gg 1)$ из (6) получается

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1. \tag{8}$$

При этом формулы (5) находятся в соответствии с вычислениями работы [9], а также с гидродинамическим рассмотрением работы [14], если при таком рассмотрении полагается $\gamma_0 = 2$, где γ_0 — показатель адиабаты.

Если же плазма ультрарелятивистская $(\alpha \ll 1)$, то

$$\lambda_1 = 4/\alpha \equiv 4T/mc^2, \quad \lambda_2 = 4/5. \tag{9}$$

Линейный рост параметра λ_1 с увеличением температуры соответствует релятивистскому увеличению эффективной массы частиц. Изменение же параметра λ_2 от 1 в нерелятивистской плазме до 4/5 в ультрарелятивистской соответствует изменению показателя адиабаты от $\gamma_0 = 2$ до $\gamma_0 = 8/5$. Такой закон изменения γ_0 имеет место только в случае поперечных движений бесстолкновительной плазмы. В случае столкновительной гидродинамики вместо этого мы имели бы $\gamma_0 = 5/3$ в нерелятивистском приближении и $\gamma_0 = 4/3$ в ультрарелятивистском пределе.

В соответствии с представлениями работы [7], ниже мы ограничимся рассмотрением электронно-позитронной плазмы. Температуры электронов и позитронов считаем равными. Тогда с помощью (1) и (5) получаем следующее выражение для квадрата частоты желобковых возмущений $(k_\parallel = 0)$

$$\omega^2 = -\frac{2(k_y^2/k_\perp^2)\, c^2}{\alpha R(\lambda_1 + c_A^2/c^2)} \left(\varkappa - \frac{\lambda_2}{4R} \frac{14 + 5\lambda_2\beta}{1 + \lambda_2\beta}\right). \tag{10}$$

Здесь $\varkappa = d \ln P/dx$ — обратный характерный размер градиента давления плазмы, $c_A^2 = B^2/8\pi nm$ — квадрат скорости Альфвена, $\beta = 16\pi T/B^2$ — отношенне давления плазмы к давлению магнитного поля. Аналогично, из (1) и (7) имеем для косых волн с $|\omega| \ll k_\parallel v_\parallel$

$$\omega^2 = -\frac{2c^2}{\alpha(\lambda_1 + c_A^2/c^2)}\left(\frac{\varkappa}{R}\frac{k_y^2}{k_\perp^2} - \frac{k_\parallel^2}{\beta}\right). \tag{11}$$

Заметим, что слагаемое c_A^2/c^2 в знаменателях (10), (11) соответствует учету тока смещения. (Это слагаемое возникает благодаря тому, что мы удерживаем единицу в выражениях (5), (7) для ε_{11}). В нерелятивистском пределе ток смещения важен при известном условии $c_A^2/c^2 \gtrsim 1$ см. гл. 6 книги [5]), вытекающем также из приведенных выше формул. В ультрарелятивистском пределе, в соответствии с (9), ток смещения важен, если $\beta \lesssim 1$. Из (10), (11) ясно также, что ток смещения влияет на инкремент нарастания возмущений, но не на границы неустойчивости.

3. *Границы неустойчивости.*

а. *Возмущения с* $k_\parallel = 0$. Из (10) следует, что возмущения с $k_\parallel = 0$ неустойчивы ($\omega^2 < 0$), если

$$\varkappa R > \frac{\lambda_2}{4}\frac{14 + 5\lambda_2\beta}{1 + \lambda_2\beta}. \tag{12}$$

В нерелятивистском пределе это означает]9, 14]

$$\varkappa R > \frac{14 + 5\beta}{4(1 + \beta)}. \tag{13}$$

В ультрарелятивистском пределе вместо (13) имеем

$$\varkappa R > \frac{2(7 + 2\beta)}{5 + 4\beta}. \tag{14}$$

Видно, что различие между (13) и (14) невелико. Это естественно, поскольку, как ясно из сказанного ранее, релятивистская модификация условия устойчивости связана лишь с изменением показателя адиабаты γ_0, а последний при переходе от нерелятивистского предела к релятивистскому меняется незначительно (от 2 до 8/5).

б. *Возмущения с* $|\omega| \ll k_\parallel v_\parallel$. Для косых возмущений из (11) вытекает условие неустойчивости

$$\beta\frac{\varkappa}{R} > k_\parallel^2\, k_\perp^2/k_y^2. \tag{15}$$

Оно не зависит от релятивистского фактора и совпадает с условием неустойчивости, фигурирующим в нерелятивистской теории (ср. (15) с формулами (6.58), (6.59), (11.43) книги [5]).

Если $k_y \simeq k_\perp$, а все остальные пространственные размеры одного порядка величины, $\varkappa \simeq k_\parallel \simeq 1/R$, то условие неустойчивости (15) качественно означает

$$\beta > 1. \tag{16}$$

Прилагая этот результат к проблеме пульсаров, можно заключить, что в замкнутой части магнитосферы пульсаров может устойчиво удерживаться плазма лишь с давлением, не слишком большим по сравнению с давлением магнитного поля, $\beta \lesssim 1$.

4. *Инкременты нарастания возмущений.* Если условия неустойчивости (12) и (15) выполнены с достаточно большим запасом, то, согласно (10), (11), возмущения должны нарастать со временем с инкрементом $\delta \equiv \operatorname{Im} \omega$, равным

$$\delta = \left[\frac{2T\varkappa}{mR(\lambda_1 + c_A^2/c^2)}\right]^{1/2} \frac{|k_y|}{k_\perp}. \tag{17}$$

Нерелятивистский предел этого выражения хорошо известен (см., например, гл. 6 книги [5]). В ультрарелятивистском пределе, представляющем наибольший интерес для теории пульсаров, из (17) следует

$$\delta = c\left(\frac{\varkappa}{R}\frac{\beta}{1+2\beta}\right)^{1/2} \frac{|k_y|}{k_\perp}. \tag{18}$$

Для оценок можно принять $\varkappa \simeq 1/R$, $\beta \simeq 1$ (ср. с разделом 3). Полагая также $|k_y| \simeq k_\perp$, получаем характерное значение инкремента

$$\delta \simeq c/R. \tag{19}$$

Для периферийной области замкнутой части магнитосферы пульсара радиус кривизны R имеет порядок величины радиуса светового цилиндра, так что $R \simeq c/\Omega$, где Ω — угловая частота вращения пульсара. В этом случае из (19) следует

$$\delta \simeq \Omega. \tag{20}$$

Такая же оценка величины инкремента нарастания возмущений фигурирует и в работе [4], хотя в [4] использовалось нерелятивистское приближение. Чтобы разъяснить такое совпадение оценок инкремента, обратимся к формуле (17), опустив в ней член, обязанный току смещения,

$$\delta = \left(\frac{2T\varkappa}{mR\lambda_1}\right)^{1/2} \frac{|k_y|}{k_\perp}. \tag{21}$$

Поскольку, согласно (9), в ультрарелятивистском пределе поперечная инерция плазмы пропорциональна температуре, $\lambda_1 \sim T$, то, несмотря на увеличение градиента давления плазмы, инкремент неустойчивости при $T \gg mc^2$ остается примерно таким же, как и при $T \simeq mc^2$, т. е. на пределе применимости нерелятивистского приближения.

5. *Обсуждение результатов*. Из нашего рассмотрения качественно следует, что при любом релятивистском факторе частиц (в том числе при $T \gg mc^2$) давление плазмы, устойчиво удерживаемой в криволинейном магнитном поле, не может существенно превышать давление магнитного поля $\beta \lesssim 1$. Кстати, такое ограничение представляется разумным еще и потому, что вследствие неучитываемой нами анизотропии распределения частиц по импульсам, в плазме с $\beta \gtrsim 1$ должны были бы развиваться также анизотропные неустойчивости, препятствующие ее удержанию.

Указанное ограничение на давление плазмы возникает для косых возмущений, которые вследствие этого представляются более опасными, чем чисто желобковые возмущения.

Мы проследили зависимость инкремента желобковой неустойчивости от релятивистского фактора плазмы и показали, что в ультрарелятивистском пределе характерный инкремент оказывается примерно таким же, как и в слаборелятивистском случае.

Мы полагаем, что проведенный анализ будет полезен для дальнейшего развития теории скачкообразной эжекции плазмы из магнитосферы пульсаров.

Авторы благодарны В. В. Усову за стимулирующие дискуссии.

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета

THE FLUTE INSTABILITY OF THE RELATIVISTIC PLASMA

T. D. KALADZE, A. B. MIKHAILOVSKII

The theoretical study of the flute instability of the relativistic plasma is given which is of interest in the theory of jump ejection of particles from pulsars. The boundaries of instability are established and the growth rate of perturbations for the plasma with arbitrary relativistic factor is calculated. It is shown that for any relativistic factor (for $T \gg mc^2$ including), the pressure of the plasma, stable confined in the curved magnetic field cannot essentially exceed the magnetic field pressure ($\beta \lesssim 1$). It is established that in the ultrarelativistic limit the characteristic growth rate of instability has the same order of magnitude as in the case of the weak relativistic plasma.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Михайловский*, Физика плазмы, 6, 283, 1980.
2. *J. D. Scargle, F. Pacini*, Nature, Phys. Sci., 232, 144, 1971.
3. *Л. М. Озерной, В. В. Усов*, Астрон. ж., 50, 422, 1973.
4. *Л. А. Пустильник*, Астрон. ж., 54, 766, 1977.
5. *А. Б. Михайловский*, Теория плазменных неустойчивостей, т. 2, Атомиздат, М., 1971.
6. *P. A. Sturrock*, Ap. J., 164, 529, 1971.
7. *M. A. Ruderman, P. G. Sutherland*, Ap. J., 196, 51, 1975.
8. *Л. В. Михайловская, А. Б. Михайловский*, Ядерный синтез, 3, 113, 1963.
9. *Л. В. Михайловская, А. Б. Михайловский*, Ядерный синтез, 3, 276, 1963.
10. *А. Б. Михайловский*, Вопросы теории плазмы, под ред. М. А. Леонтовича, вып. 3, Атомиздат, М., стр. 141.
11. *B. I. Meerson, A. B. Mikhailovskii, O. A. Pokhotelov*, J. Plasma Phys., 19, 1177, 1977.
12. *B. I. Meerson, A. B. Mikhailovskii, O. A. Pokhotelov*, J. Plasma Phys., 20, 137, 1978.
13. *A. B. Mikhailovskii*, J. Plasma Phys., 21, 1979.
14. *Б. Б. Кадомцев*, ЖЭТФ, 37, 1096, 1959.