

# АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 11

ФЕВРАЛЬ, 1975

ВЫПУСК 1

## НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ ПЛОТНОСТИ. I. СИЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ

С. Н. НУРИТДИНОВ

Поступила 27 февраля 1974

Пересмотрена 22 мая 1974

В работе исследована зависимость поведения волны плотности от амплитуды в слабовращающейся модели с постоянной фазовой плотностью. Волна взята периодической в физическом пространстве. Получено, что нелинейная волна достаточно малой амплитуды неустойчива относительно взаимодействия ее с самой собой, если она неустойчива в линейном приближении. Напротив, при более сильных возмущениях, когда волна распадается на последовательность сгустков, имеется устойчивость; при этом отдельные сгустки коллапсируют. Этот процесс с привлечением теории волн плотности, по-видимому, может объяснить формирование звездных облаков.

*Введение.* Как известно, решение задачи об эволюции возмущения в однородной самогравитирующей системе в линейном приближении представляет собой суперпозицию независимых плоских волн. Однако, если система неустойчива, то это решение с течением времени теряет силу, и необходим учет нелинейных эффектов.

В данной работе рассматриваются сильные возмущения в слабо-вращающейся модели звездной системы. Исследуется зависимость поведения стационарной, периодической в физическом пространстве волны плотности от ее амплитуды. Полученная зависимость определяет границу нелинейной устойчивости, которая в свою очередь подчеркивает важную роль нелинейных эффектов в самогравитирующих системах.

1. *Постановка задачи и случай линейного приближения.* Рассмотрим бесстолкновительную звездную систему, которая в целом, для определенности, имеет вид сильно сплюснутого однородного эл-

липсоида. Пусть исходное состояние соответствует фигуре равновесия в виде эллипсоида Маклорена и вектор угловой скорости вращения  $\vec{\omega}_0$  направлен по оси  $z$ .

Наложим возмущение, распространяющееся по оси  $x$ . Известно [1], что для сильно сплюснутых эллипсоидов  $\omega_0^2 \ll 2\pi Gm\rho_0$ , где  $G$  — гравитационная постоянная,  $m$  — масса отдельной звезды и  $\rho_0$  — звездная плотность основного состояния. Следовательно, кориолисовыми силами будем пренебрегать, так как они малы по сравнению с гравитационными. Предположим далее, что длина волны существенно меньше размеров системы, так что зависимость от координат  $y$  и  $z$  можно не учитывать. Из этого следует, что во всем дальнейшем такие параметры равновесной системы, как величины полуосей, не играют роли. Сходная постановка задачи встречается в работе [2].

Тогда для произвольного нестационарного состояния имеет место уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

где  $f(v, x, t)$  — фазовая плотность,  $\varphi(x, t)$  — гравитационный потенциал. Если считать  $f$  заданным параметром, а  $v$  функцией от  $t, x$  и  $f$ , то согласно формулам замены независимых переменных получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial f}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial f}}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{\frac{\partial v}{\partial f}}. \quad (2)$$

Подставив соотношения (2) в (1), получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает колебания фазовых слоев равной плотности. Но здесь мы его применим только к границе фазового объема модели звездной системы, которую возьмем в виде

$$f = \begin{cases} \eta, & -v_0 \leq v \leq v_0, \\ 0, & -v_0 > v, \quad v_0 < v, \end{cases} \quad (4)$$

причем  $\eta$  и  $v_0$  — постоянные величины. Аналогичные модели, где фазовая плотность постоянна в некотором промежутке, а вне его обращается в нуль, рассматривались, например, авторами работы [3]. Возмущение звездной плотности, соответствующее модели (4),

$$\rho = \eta \cdot (\xi - \xi_1), \quad (5)$$

где  $\xi(x, t)$  и  $\xi_1(x, t)$  — произвольные отклонения, соответственно, от  $v_0$  и  $-v_0$ . Эффект звездной плотности основного состояния сбалансирован центробежной силой и силой тяготения в равновесном состоянии. Доминирующим является компонент силы тяготения по оси  $z$ . Согласно теореме Лиувилля можем считать, что возмущения не меняют значения фазовой плотности  $f$ . Следовательно, признаком наличия волны плотности в системе является только деформация ее фазовой границы. Мы рассмотрим нелинейную волну, периодическую по  $x$ -координате, причем форма волны может быть произвольной.

Подставляя по очереди  $v_0 + \xi$  и  $-v_0 + \xi_1$  в (3), получим уравнения эволюции фазовой границы

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (v_0 + \xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + (-v_0 + \xi_1) \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

К ним добавим уравнение Пуассона, которое с учетом (5) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\gamma_1 \Omega^2 (\xi - \xi_1), \quad (8)$$

где  $\Omega^2 \equiv 4\pi Gm$ . Нас интересует, является ли зависимость поведения волны от амплитуды стабилизирующим или дестабилизирующим фактором. Это обстоятельство учитывается в (6) и (7) членами  $\xi(\partial \xi / \partial x)$  и  $\xi_1(\partial \xi_1 / \partial x)$ .

Рассмотрим сначала случай линейного приближения. Линеаризуем (6) и (7) и везде подставим  $\partial / \partial t = -i\omega$ ,  $\partial / \partial x = ik$ . Получим

$$(\omega - kv_0) \xi + kz = 0, \quad (6')$$

$$(\omega + kv_0) \xi_1 + k\varphi = 0, \quad (7')$$

$$\varphi = \gamma_1 \frac{\Omega^2}{k^2} (\xi - \xi_1). \quad (8')$$

Данная система уравнений дает дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = k^2 v_0^2 - 2v_0 \gamma_1 \Omega^2. \quad (9)$$

Отсюда находим критическую длину Джинса

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{2v_0}{\gamma_1}}, \quad (10)$$

которая определяет границу устойчивости в линейном приближении. Формула (10) является частным случаем более общего результата [4, 5].

2. *Нелинейная стационарная волна плотности при  $|\xi|, |\xi_1| < v_0$ .* Вернемся к случаю стационарной нелинейной волны, когда в (7) и (8) члены  $\partial \xi / \partial t$  и  $\partial \xi_1 / \partial t$  равны нулю. Иными словами, рассмотрим нелинейную волну, как бы застывшую в системе. Тогда из (6) и (7) имеем

$$(v_0 + \xi) \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad (6'')$$

$$(-v_0 + \xi_1) \frac{d\xi_1}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} = 0. \quad (7'')$$

Проинтегрировав эти уравнения, получаем

$$\xi = -v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2(\varphi + c)}, \quad \xi_1 = v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2(\varphi + c_1)}, \quad (11)$$

где  $c$  и  $c_1$  — произвольные постоянные. Здесь уместно предположить неизменность импульса системы, т. е.

$$\int_0^{\lambda} dx \int_{-v_0 + \xi_1}^{v_0 + \xi} v dv = 0, \quad (12)$$

где  $\lambda$  — искомая длина нелинейной стационарной волны. Подставляя (11) в (12), находим  $c = c_1$ . Таким образом, в стационарном состоянии отклонения  $\xi$  и  $\xi_1$  симметричны относительно оси  $x$  фазовой плоскости. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\ddot{w} = 2\gamma_1 \Omega^2 (v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2w}), \quad (13)$$

где введено обозначение  $w = \varphi + c$ , а точки означают дифференцирование по  $x$ .

Умножив (13) на  $\dot{w}$  и проинтегрировав, получаем

$$\dot{w} = \pm 2\Omega \sqrt{\gamma_1 f(w)}, \quad (14)$$

причем

$$f(w) = v_0 w - \frac{1}{3} (v_0^2 + 2w)^{3/2} + c_0, \quad (15)$$

где  $c_0$  — постоянная интегрирования.

Функция  $w(x)$  является периодической и характеризует нелинейную волну плотности. Пусть ее максимальное и минимальное значения равны, соответственно,  $a$  и  $b$ . В качестве амплитуды рассматриваемой волны можно взять  $a - b$  или просто  $a$ , так как  $a$  и  $|b|$  близки

между собой (см. ниже (18) и (22)). Систему отсчета введем так, чтобы  $w = a$  при  $x = 0$ . Тогда из (14) и (15) находим

$$c_0 = \frac{1}{3} (v_0^2 + 2a)^{3/2} - v_0 a \quad (16)$$

и искомую длину нелинейной волны

$$\lambda(a) = \frac{1}{\Omega \sqrt{\gamma_1}} \int_b^a \frac{dv}{V J(w)}. \quad (17)$$

Перед тем, как вычислить интеграл в (17), необходимо качественное исследование функции  $J(w)$ .

Рассмотрим сначала нелинейную волну в случае, когда отклонения  $|\xi|$ ,  $|\xi_1| < v_0$ . При этом прежде всего из (11), (14) и (15) следует, что интервал изменений  $w$  ограничен:  $a \geq w > -v_0^2/2$  ( $w \leq -v_0^2/2$ , что будет рассмотрено в следующем разделе, соответствует более сильным возмущениям). Далее, функция  $J(w)$  имеет максимум в точке  $w = 0$ , а  $J(0) = c_0 - (v_0^3/3)$ . Она может обращаться в нуль только в двух точках, поскольку  $d^2 J/dw^2 < 0$ . Ввиду вышеотмеченной периодичности  $w(x)$ , этими точками являются именно  $w = a$  и  $w = b$ , и имеем

$$J\left(-\frac{v_0^2}{2}\right) = c_0 - \frac{v_0^3}{2} < 0, \quad \frac{v_0^3}{3} \leq c_0 < \frac{v_0^3}{2}, \quad -\frac{v_0^2}{2} < b \leq 0. \quad (18)$$

Обозначив  $\sqrt{v_0^2 + 2w} = u$ , из (15) - (17) получаем

$$\lambda(a) = \frac{\sqrt{3}}{\Omega \sqrt{\gamma_1}} \int_{u_b}^{u_a} \frac{u du}{\sqrt{(u_a - u)(u - u_b)(u - u_c)}}, \quad (19)$$

где

$$u_a = \sqrt{v_0^2 + 2a}, \quad (20)$$

$$u_{b,c} = \frac{3v_0 - 2u_a \pm \sqrt{3(v_0 + 2u_a)(3v_0 - 2u_a)}}{4}. \quad (21)$$

Корень  $u_c < u_b$ , очевидно, не имеет физического смысла. Из (20) и (21) видно, что  $0 < u_a \leq (3/2)v_0$ . Поскольку, с другой стороны,  $u_b = \sqrt{v_0^2 + 2b}$ , то согласно (18), (20) и (21) для рассматриваемых отклонений амплитуда ограничена:

$$0 \leq a < \frac{5}{8} v_0^2. \quad (22)$$

Легко проверить, что при  $a = 0$ ,  $b = 0$  (19) дает критическую длину (10) линейного приближения.

Сделав в (19) подстановку  $u = u_a \cos^2 \tau + u_b \sin^2 \tau$ , получим\*

$$\lambda(a) = \frac{2\sqrt{3}}{\Omega\sqrt{\eta}} \left[ \frac{u_c}{\sqrt{u_a - u_c}} K(n) + \sqrt{u_a - u_c} E(n) \right], \quad (24)$$

где  $K(n)$  и  $E(n)$  — полные эллиптические интегралы I и II родов, соответственно,  $n \equiv \left( \frac{u_a - u_b}{u_a - u_c} \right)^{1/2}$ .

Численные вычисления  $\lambda(a)$  по формуле (24) в интервале (22) представлены графически (см. рис. 2, кривая  $NP$ ), откуда видно, что с ростом амплитуды волны ее длина монотонно уменьшается. Это физически означает, что волна плотности неустойчива относительно взаимодействия ее с самой собой.

3. *Случай предельно сильной волны плотности.* Теперь опишем, что будет происходить при более сильном возмущении (т. е. при  $\xi = -v_0$ ,  $\xi_1 = v_0$ ), которое соответствует нелинейной волне  $w(x)$  с параметрами  $a$  и  $b$ , лежащими в следующих пределах:

$$\frac{5}{8} v_0^2 \leq a < \infty, \quad \frac{v_0^2}{2} \gg b > -\infty. \quad (25)$$

В этом случае в фазовой плоскости вдоль оси  $x$  появляются узловые точки, в которых максимальная скорость  $v$  обращается в нуль. Это значит, что волна в этих точках обрывается. Происходит распад волны на последовательность сгустков. По-прежнему выделим некоторое почти стационарное состояние такой системы (рис. 1). Тогда искомая длина волны

$$\lambda(a) = 2[\lambda_1(a) + \lambda_2(a)], \quad (26)$$

где  $2\lambda_1$  — размер каждого сгустка,  $2\lambda_2$  — длина участка с нулевой плотностью. Подстановка  $\xi = -v_0$ ,  $\xi_1 = v_0$  в (11) дает  $w = -v_0^2/2$ . Поэтому (13) теперь примет вид:

$$w = \begin{cases} 2\gamma\Omega^2(v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2w}), & a \leq w < -\frac{v_0^2}{2}, \\ 2\gamma\Omega^2 v_0, & -\frac{v_0^2}{2} \leq w \leq b, \end{cases} \quad (27)$$

$$(28)$$

\*Формула 3.132.5 в [6] неточна.

причем  $w(x)$  удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$x = \frac{\lambda}{2}, \quad \dot{w} = 0, \quad w = b, \quad (29)$$

$$x = \frac{\lambda}{2} - \lambda_2, \quad w = -\frac{v_0^2}{2}. \quad (30)$$

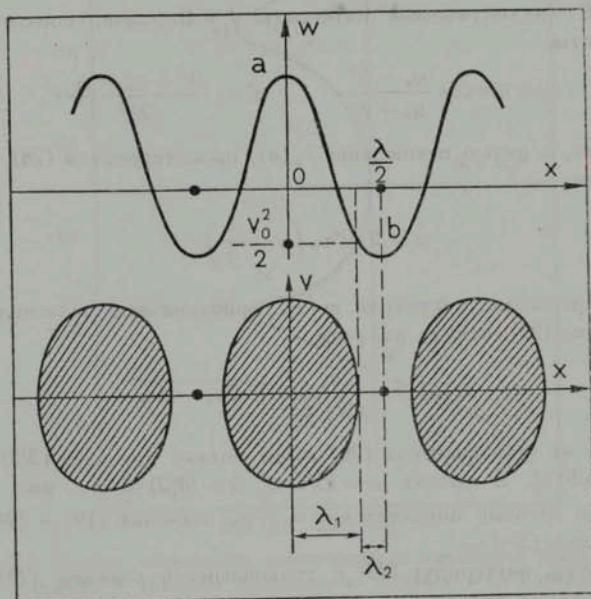


Рис. 1. Сильно нелинейная стационарная волна плотности при  $\xi = -v_0$ ,  $\xi_1 = v_0$ .

В данном случае справедливы (14) и (16), а  $J(-v_0^2/2) \geq 0$ . Согласно (27), вместо (19) имеем

$$i_1(a) = \frac{\sqrt{3}}{2\Omega\sqrt{\gamma}} \int_0^{u_a} \frac{udu}{\sqrt{(u_a - u)(u - u_b)(u - u_c)}}, \quad (31)$$

где  $u_a$ ,  $u_b$  и  $u_c$  определяются формулами (20) и (21). Поскольку здесь  $a \geq (5/8)v_0^2$ ,  $u_a \geq (3/2)v_0$ , то корни  $u_b$ ,  $u_c$  являются комплексно-сопряженными. Представим их в виде  $u_{b,c} = u_1 \pm iu_2$ . Подставив в (31)

$$u = u_a - h^2 \frac{1 + \cos \tau}{1 - \cos \tau}, \quad h^2 = \sqrt{(u_a - u_1)^2 + u_2^2},$$

вычислим возникшие интегралы [6]. Получим

$$\lambda_1(a) = \frac{\sqrt{3}}{\Omega \sqrt{\eta}} \left[ \frac{u_a - h^2}{2h} F(\pi - \tau_0, n^2) + h \cdot E(\pi - \tau_0, n^2) - \frac{\sqrt{u_a(u_1^2 + u_2^2)}}{u_a + h^2} \right], \quad (32)$$

где  $F$  и  $E$  — эллиптические интегралы I и II родов, соответственно, а аргументы

$$\tau_0 = \arccos \frac{u_a - h^2}{u_a + h^2}, \quad n^2 = \frac{h^2 + u_a - u_1}{2h^2}.$$

Далее, с целью нахождения  $\lambda_2(a)$ , проинтегрируем (28) с учетом (29), имеем

$$\dot{w} = 2\gamma\Omega^2 v_0 \left( x - \frac{\lambda}{2} \right). \quad (33)$$

Ввиду непрерывности функции  $w(x)$ , приравниваем значения (33) и (27) в точке (29), откуда получим

$$\lambda_2(a) = \frac{u_a}{v_0 \Omega \sqrt{6\gamma}} \sqrt{2u_a - 3v_0}. \quad (34)$$

Как видно из (34), формула (26) верна только при  $u_a \geq (3/2)v_0$ , т. е. при  $a \geq (5/8)v_0^2$ . В точках  $a = (5/8)v_0^2$ ,  $b = (1/2)v_0^2$  (см. рис. 2, точки  $N, N'$ ), где впервые появляется  $\xi = -v_0$ , значения (19) и (26) совпадают и равны  $(3/\pi)\lambda_0$ .

Наконец, интегрируя (33) с граничными условиями (29) и (30), находим

$$b = -\frac{v_0^2}{2} - v_0 \gamma \Omega^2 \cdot \lambda_2^2.$$

График  $\lambda(a)$  в интервалах (25) изображен на рис. 2 дугой  $NM$  ( $N'M'$ ) и пунктирной кривой. Из рисунка видно, что только при больших амплитудах нелинейность стабилизирует имеющуюся неустойчивость. Смена неустойчивости происходит в точке  $M$  с координатами  $a \approx 0.68 v_0^2$ ,  $\lambda \approx 0.944 \lambda_0$ . Отметим, что  $MNP$  ( $M'N'P$ ) представляет собой неустойчивую ветвь, а пунктирная кривая — устойчивую. Область, находящаяся под дугой  $MNP$ , очевидно, соответствует устойчивому возвращению к стационарному состоянию.



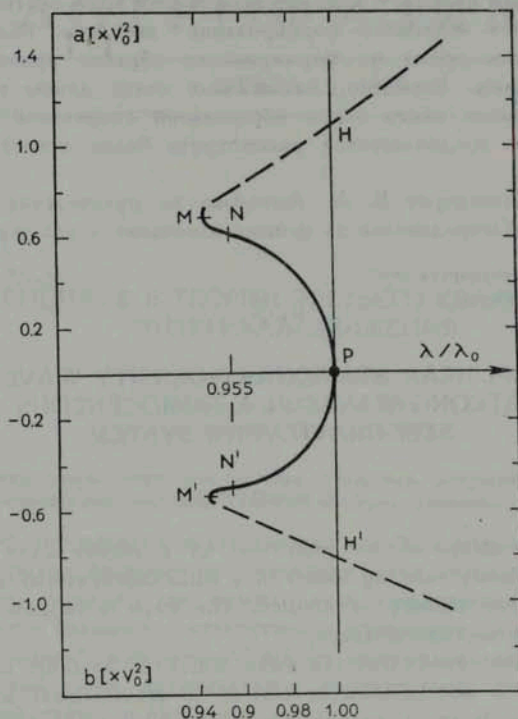


Рис. 2. График зависимости длины волны от амплитуды. Здесь  $HPH'$  — граница устойчивости в линейном приближении. В точке  $N(N')$  впервые появляется  $\xi = -v_0$ .  $M(M')$  — точка поворота с координатами  $a \approx 0.68$ ,  $\lambda \approx 0.944\lambda_0$ ,  $b \approx 0.53$ , где неустойчивость переходит в устойчивость.

**Заключение.** Мы рассмотрели зависимость длины волны плотности от амплитуды в почти стационарных условиях. Если волна имеет достаточно малую амплитуду, то она неустойчива относительно взаимодействия ее с самой собой. Напротив, при более сильных возмущениях волна распадается на последовательность сгустков и такая система устойчива. При этом образуются коллапсирующие «сгущения». Может получиться, что размер сгущения станет намного меньше, чем первоначальная длина волны. Все это подчеркивает желательность разработки теории Джинса в случае различных нелинейных моделей звездной системы.

Указанный процесс с привлечением теории волн плотности, по-видимому, может объяснить формирование звездных облаков, причем характерное время их формирования обратно пропорционально амплитуде волны. Вероятно, аналогичная связь длины волны с ее амплитудой имеет место и при образовании спиральной структуры. В дальнейшем предполагается рассмотреть более естественные модели.

Автор благодарит В. А. Антонова за руководство работой, а также К. Ф. Огородникова за ценные замечания и обсуждение.

Ленинградский государственный  
университет

## NON-LINEAR STATIONARY DENSITY WAVES. I. STRONG WAVES IN A HOMOGENEOUS SELF-GRAVITATING SYSTEM

S. N. NURITDINOV

The dependence of the behaviour of a density wave on the amplitude in a slowly rotating model of a collisionless stellar system with a constant phase density is studied. The wave is supposed to be periodical in the coordinate space.

It has been found that the wave which is unstable in the linear approximation is also unstable in relation to gravitational self-induction if its amplitude is small enough. On the contrary at stronger perturbations when the wave disintegrates into a row of parts stability is noticed. But each part taken alone does collapse. This according to the theory of density waves seems to suggest the possibility of the formation of stellar clouds.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Крат, *Фигуры равновесия небесных тел*, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.
2. E. P. Lee, *Ap. J.*, 148, 185, 1967.
3. F. Hohl, M. R. Feix, *Ap. J.*, 147, 1164, 1967.
4. D. Lynden-Bell, *M. N.*, 124, 279, 1962.
5. В. А. Антонов, С. Н. Нуритдинов, *Астрофизика*, 10, 627, 1974.
6. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, М., 1971.