

# АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

# АСТРОФИЗИКА

ТОМ 11

ФЕВРАЛЬ, 1975

ВЫПУСК 1

## ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ В ЛИНИИ ПРИ ПРОФИЛЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ, МЕНЯЮЩЕМСЯ С ГЛУБИНОЙ

Д. И. НАГИРНЕР, К. И. СЕЛЯКОВ

Поступила 15 июля 1974

Рассматривается перенос линейчатого излучения в плоской атмосфере при полном перераспределении по частоте. Считается, что ширина линии зависит от оптической глубины. Показано, что если эта зависимость экспоненциальная, то задача об образовании линии сводится к интегральному уравнению с симметричным разностным ядром. Оцениваются средние числа рассеяний фотонов. Для рассеяния в одномерной полубесконечной среде при лоренцовском профиле найдены явные выражения для интенсивности выходящего излучения.

В большинстве работ, посвященных образованию спектральных линий в рассеивающих средах, делается предположение о неизменности профиля коэффициента поглощения в среде. Если рассеяние происходит изотропно и с полным перераспределением по частотам, то задача о переносе излучения в плоских средах сводится к интегральному уравнению с ядром, зависящим от модуля разности аргументов и являющимся суперпозицией экспонент. Теория подобных уравнений подробно развита и физическая картина явления достаточно ясна [1, 2].

Однако предположение о постоянстве профиля коэффициента поглощения в среде ограничивает возможности приложений, при сравнении теории с наблюдениями может оказаться необходимым учесть его переменность. Эта переменность определяется несколькими факторами. Прежде всего, доплеровская ширина линии пропорциональна средней тепловой скорости атомов и, тем самым, корню из температуры. Ширина линии, обусловленная столкновениями, также зависит от температуры и плотности. Помимо этого, в среде могут происходить макроскопические движения, изменяющие профиль коэффициента поглощения. В астрофизических объектах, таких как газовые туман-

ности и звездные атмосферы, эти параметры часто нельзя считать постоянными, так как такое предположение может сильно исказить форму линии.

Численные методы решения уравнения переноса позволяют учесть зависимость параметров среды от координат [3]. В настоящее время существуют программы для расчета полей излучения при очень общих предположениях о среде, в которой происходит диффузия (например, программа PANDORA, описанная в [4]). В [5] отмечалось, что зависимость доплеровской ширины линии от глубины сильно сказывается на профилях линий, образующихся в атмосферах.

Аналитические методы удается применить при рассмотрении образования линий в среде, с постоянным градиентом скорости. Такая задача тоже сводится к интегральному уравнению с ядром, зависящим от модуля разности аргументов (однако не являющимся суперпозицией экспонент), и достаточно полно изучена [6, 7].

Из аналитических исследований, учитывающих изменение ширины линии в среде, можно указать, видимо, лишь одно — [8]. Здесь методом вынесения неизвестной функции источников за знак интеграла получено приближенное решение задачи. Ширина линии предполагалась линейно зависящей от геометрической глубины, а среда — одномерной.

Из всего сказанного следует, что изучение проблемы переноса с учетом изменения профиля коэффициента поглощения в линии аналитическими методами, по-видимому, желательно. В настоящей работе мы покажем, что есть один случай переменной в среде ширины линии, поддающийся аналитическому исследованию.

1. *Основные соотношения.* Будем рассматривать образование резонансной линии в плоском слое при изотропном рассеянии и полном перераспределении по частотам. Предположим, что ширина линии  $\Delta\nu$  меняется в среде по закону

$$\Delta\nu(\tau) = \Delta\nu(0)/f(\tau), \quad (1)$$

где  $\tau$  — оптическая глубина в центре линии,  $f(\tau)$  — некоторая (неотрицательная) функция. Введем безразмерную частоту, отсчитываемую от центра линии  $\nu_0$

$$x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu(0) \quad (2)$$

и примем, что зависимость от глубины профиля коэффициента поглощения  $\alpha(x, \tau)$ , нормированного так, что  $\alpha(0, 0) = 1$ , определяется только изменением ширины линии:

$$\alpha(x, \tau) = \alpha(x f(\tau)). \quad (3)$$

Тогда уравнение переноса излучения в линии запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} - \alpha(xf(\tau))I(\tau, \mu, x) + \varepsilon_0(\tau, x) + \\ & + \frac{\lambda}{2} Af(\tau)\alpha(xf(\tau)) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x'f(\tau)) dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu'. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $I(\tau, \mu, x)$  — интенсивность излучения,  $\mu$  — косинус угла между направлениями распространения излучения и возрастания  $\tau$ ,  $\lambda$  — вероятность выживания фотона при рассеянии,  $\varepsilon_0(\tau, x)$  описывает первичные источники излучения,  $A$  — нормировочная постоянная, такая что

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(y) dy = 1. \quad (5)$$

Как и при постоянном  $\Delta\nu$  [2], достаточно рассмотреть случай, когда  $\varepsilon_0(\tau, x)$  пропорционально  $\alpha(xf(\tau))$ .

Уравнение (4) будем решать при граничных условиях, выражающих отсутствие падающего на среду диффузного излучения:

$$I(0, \mu, x) = 0, \quad \mu > 0; \quad I(\tau_0, \mu, x) = 0, \quad \mu < 0, \quad (6)$$

где  $\tau_0$  — оптическая толщина среды.

Введем функцию  $S(\tau)$ , которую будем называть (не совсем точно) функцией источников, положив

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \sqrt{f(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(xf(\tau)) dx \int_{-1}^1 I(\tau, \mu, x) d\mu + S_1(\tau), \quad (7)$$

где

$$S_1(\tau) = \frac{\varepsilon_0(\tau, x)}{\alpha(xf(\tau)) \sqrt{f(\tau)}}, \quad (8)$$

тем самым учтено предположение о виде первичных источников излучения. Из (4), (6), (7) получаем основное интегральное уравнение задачи

$$S(\tau) = S_1(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(\tau, \tau') S(\tau') d\tau'. \quad (9)$$

Множитель  $\sqrt{f(\tau)}$  введен в выражении (7) для симметризации ядра уравнения (9). Симметричное ядро (9) дается формулой

$$K(\tau, \tau') = \\ = A \sqrt{f(\tau)f(\tau')} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(xf(\tau)) \alpha(xf(\tau')) dx E_1 \left( \left| \int_{\tau}^{\tau'} \alpha(xf(t)) dt \right| \right), \quad (10)$$

где  $E_1(t)$  — интегральная показательная функция.

Нетрудно видеть, что  $(\lambda/2) \sqrt{f(\tau)/f(\tau')} K(\tau, \tau') d\tau'$  есть вероятность того, что фотон, находившийся в поглощенном состоянии на глубине  $\tau$ , возбudit атом на глубине от  $\tau'$  до  $\tau' + d\tau'$ , по пути не рассеиваясь. Таким образом,  $(\lambda/2) K(\tau, \tau')$  представляет собой среднее геометрическое из плотностей вероятности непосредственной передачи возбуждения с глубины  $\tau$  на глубину  $\tau'$  и с глубины  $\tau'$  на глубину  $\tau$ .

Теперь конкретизируем функцию  $f(\tau)$ :

$$f(\tau) = e^{2b\tau}. \quad (11)$$

В этом случае ядро (10) становится зависящим лишь от модуля разности аргументов:

$$K(\tau, \tau') = K_b(|\tau - \tau'|), \quad (12)$$

где ядерная функция

$$K_b(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(xe^{b\tau}) \alpha(xe^{-b\tau}) E_1 \left( \left| \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \alpha(xe^{2bt}) dt \right| \right) dx. \quad (13)$$

Возрастанию ширины линии вглубь среды отвечает  $b < 0$ , а убыванию  $b > 0$ . Однако знак  $b$  не влияет на ядро:

$$K_b(\tau) = K_{-b}(\tau). \quad (14)$$

Поэтому в дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать  $b > 0$ ,  $\tau > 0$  и опускать знак модуля в формуле (13).

Таким образом, задача о переносе излучения в среде с экспоненциально меняющейся шириной линии свелась к уравнению с ядром, зависящим от модуля разности аргументов. Других видов зависимости ширины линии от глубины в среде, приводящих ядро к виду (12), по-видимому, нет.

2. *Исследование ядра.* Наряду с ядром (13), характеризующим рассеяние в плоскопараллельной атмосфере, рассмотрим ядро, описы-

вающее диффузию излучения в одномерной среде. Оно получается заменой интегральной показательной функции в формуле (13) на экспоненту:

$$K_b^{(1)}(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(xe^{b\tau}) \alpha(xe^{-b\tau}) dx \cdot \exp \left\{ - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \alpha(xe^{2bt}) dt \right\}. \quad (15)$$

Без труда устанавливается, что

$$K_b(\tau) := \int_0^1 K_{b\mu}^{(1)} \left( \frac{\tau}{\mu} \right) \frac{d\mu}{\mu}. \quad (16)$$

Получим асимптотику ядерных функций при больших значениях  $\tau$ , от которой существенно зависит поведение функции источников. Перепишем (15) в виде

$$K_b^{(1)}(\tau) = 2Ae^{-b\tau} \int_0^{\infty} \alpha(x) \alpha(xe^{-2b\tau}) dx \exp \left\{ - \frac{1}{2b} \int_0^{2b\tau} \alpha(xe^{-t}) dt \right\}. \quad (17)$$

В интеграле, стоящем в показателе экспоненты, сделаем замену

$$xe^{-t} = x(z), \quad (18)$$

где  $x(z)$  — функция, обратная  $\alpha(x)$ ,

$$\alpha(x(z)) = z. \quad (19)$$

После этого можно записать

$$\frac{1}{2b} \int_0^{2b\tau} \alpha(xe^{-t}) dt = \tau \alpha(xe^{-2b\tau}) + \frac{1}{2b} \int_{\alpha(x)}^{\alpha(xe^{-2b\tau})} \ln \frac{x(z)}{x} dz. \quad (20)$$

Подставив (20) в (17) и считая  $b\tau \gg 1$ , получим

$$K_b^{(1)}(\tau) \sim C(b) e^{-(1+b)\tau}, \quad (21)$$

где

$$C(b) = 2A \int_0^{\infty} \alpha(x) dx \exp \left\{ - \frac{1}{2b} \int_{\alpha(x)}^1 \ln \frac{x(z)}{x} dz \right\}. \quad (22)$$

Для вывода асимптотики ядра  $K_b(\tau)$  воспользуемся соотношением (16). В результате находим

$$K_b(\tau) \sim C(b) \frac{e^{-(1+b)\tau}}{\tau}, \quad \tau \gg 1, \quad b\tau \gg 1. \quad (23)$$

Рассмотрим противоположный случай,  $b\tau \ll 1$ . Разлагая (15) по степеням  $b\tau$  и удерживая члены второй степени, получаем

$$K_b^{(1)}(\tau) = K_0^{(1)}(\tau) - (b\tau)^2 K^{(1)}(\tau). \quad (24)$$

Здесь  $K_0^{(1)}(\tau)$  — ядро, описывающее рассеяние в однородной одномерной среде (в [2]  $K_0^{(1)}(\tau)$  обозначено через  $M_2(\tau)$ ). Выражение для функции  $K^{(1)}(\tau)$  довольно громоздко, и мы его не приводим. Выражение, аналогичное (24), можно получить и для  $K_b(\tau)$  (например, используя (16)). В средах с оптической толщиной  $\tau_0 \lesssim 1/b$ , т. е. при изменениях ширины линии не более, чем в 2–3 раза, замена „точного“ ядра (13) на выражение типа (24) должна являться неплохим приближением.

Отметим один примечательный факт — в случае лоренцовского профиля, т. е. при

$$a(y) = \frac{1}{1+y^2} \quad (25)$$

ядерную функцию одномерной среды можно выразить через известные функции. Подставив (25) в (15) и выполнив интегрирование, имеем:

$$K_b^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2} e^{-(1+b)\tau} F\left(1 + \frac{1}{4b}, \frac{1}{2}, 2, 1 - e^{-4b\tau}\right), \quad (26)$$

где  $F$  — гипергеометрическая функция. Таким образом, ядерная функция представляет собой ряд, составленный из экспонент, что в принципе позволяет свести интегральное уравнение к системе алгебраических уравнений. При  $|b| = 1/4n$ , где  $n$  — натуральное число, ядро становится конечной суммой экспонент, а упомянутая алгебраическая система имеет порядок  $2n$ . В частности,

$$K_{\pm 1/4}^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2} e^{-3\tau/4}, \quad K_{\pm 1/8}^{(1)}(\tau) = \frac{3}{8} e^{-7\tau/8} + \frac{1}{2} e^{-3\tau/8}. \quad (27)$$

Интересно, что через гипергеометрическую функцию можно выразить и преобразование Лапласа от ядра (26):

$$\bar{K}_b^{(1)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} K_b^{(1)}(\tau) d\tau = 1 - F\left(\frac{1}{4b}, -\frac{1}{2}, \frac{s+1+b}{4b}, 1\right). \quad (28)$$

В заключение этого раздела заметим, что влияние непрерывного спектра нетрудно учесть. При этом появляется новый параметр  $\beta$  — отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии. Задача по-прежнему приводится к интегральному уравнению с симметричным разностным ядром. В случае одномерной среды

$$K_b^{(1)}(\tau, \beta) = e^{-\beta\tau} K_b^{(1)}(\tau). \quad (29)$$

Трехмерное ядро связано с одномерным соотношением типа (16):

$$K_b(\tau, \beta) = \int_0^1 K_{bn}^{(1)}\left(\frac{\tau}{\mu}, \beta\right) \frac{d\mu}{\mu} = \\ = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(xe^{b\tau}) \alpha(xe^{-b\tau}) dx E_1 \left[ \beta\tau + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \alpha(xe^{-2bt}) dt \right]. \quad (30)$$

Теперь обсудим методы решения уравнения (9).

3. *О решении основного интегрального уравнения.* Естественно применять к решению уравнения (9) методы, развитые при решении задачи о диффузии излучения в однородной среде. Однако это применение ограничивается в нашем случае тем, что, хотя ядро (13) зависит лишь от модуля разности аргументов, оно не является суперпозицией экспонент.

Если рассматривается распространение излучения в бесконечной среде, то интегрирование в (9) надо выполнять от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Решение такого уравнения легко находится с помощью преобразования Фурье.

Резольвента (9) для полубесконечной среды ( $\tau_0 = \infty$ ) выражается через функцию  $\Phi(\tau)$ , определяемую уравнением (см. [1, 2])

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2} K_b(\tau) + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K_b(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau') d\tau'. \quad (31)$$

Применение к (31) метода Винера-Хопфа дает соотношение (см. [9])

$$H_b(z) H_b(-z) [1 - \lambda U_b(z)] = 1, \quad (32)$$

где  $H_b(z)$  — преобразование Лапласа от  $\Phi(\tau)$

$$H_b(z) = 1 + \int_0^{\infty} e^{-z\tau} \Phi(\tau) d\tau, \quad (33)$$

а  $U_b(z)$  — двустороннее преобразование Лапласа от ядерной функции

$$U_b(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z|\tau|} K_b(|\tau|) d\tau. \quad (34)$$

Из (32) можно получить явное выражение для  $H_b(z)$ :

$$\ln H_b(z) = -\frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \ln [1 - \lambda V_b(u)] \frac{du}{1 + z^2 u^2}, \quad (35)$$

где  $V_b(u) = U_b(i/u)$  — преобразование Фурье от  $K_b(|\tau|)$ .

Поскольку  $K_b(\tau)$  не является суперпозицией экспонент, то для  $H$ -функции  $H_b(z)$  не получается известных интегральных уравнений теории переноса в однородной среде [1, 2]. Отметим также, что в нашем случае  $H_b(z)$  не имеет смысла интенсивности выходящего излучения. Эту интенсивность надо находить интегрированием функции источников.

Помимо этого, обратное преобразование Лапласа от  $H_b(1/s)$ , которое, как видно из (30), дает функцию  $\Phi(\tau)$ , не удастся свести к вещественному интегралу от вещественных функций как в однородном случае [2].

Если диффузия излучения происходит в слое конечной оптической толщины, то решение уравнения (9) можно найти итерациями. Они должны сходиться быстрее, чем в случае однородной среды, т. е. интеграл от ядерной функции имеет меньшую величину. Важной особенностью ядра (13) является существование всех его моментов. Это позволяет применять к решению уравнения переноса приближение типа диффузионного.

Конечно, выбор функции  $f(\tau)$  в виде экспоненты делает задачу крайне идеализированной. Однако в конечном слое при  $b\tau_0 \lesssim 1$  такой вид функции  $f(\tau)$  может неплохо отражать действительность. В этой статье рассмотрим две задачи, для которых получаются сравнительно простые аналитические решения.

4. *Среднее число рассеяний фотона.* Большую важность для понимания физической картины явления представляет определение среднего числа рассеяний фотона  $\bar{N}$ . Этому вопросу посвящена обширная литература (см., например, [10—13]). Рассмотрим те изменения, которые внесет в величину  $\bar{N}$  переменность ширины линии. Как и ранее, считаем, что ширина линии меняется по экспоненте, т. е.  $f(\tau)$  имеет вид (11).



Как и в случае однородной среды  $\bar{N}$  следующим образом определяется через „функцию источников“:

$$\bar{N} = \frac{\int_0^{\tau_0} e^{b\tau} S(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} a(xe^{2b\tau}) dx}{\int_0^{\tau_0} e^{b\tau} S_1(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} a(xe^{2b\tau}) dx}. \quad (36)$$

Множитель  $e^{b\tau}$  появился здесь из-за проведенной симметризации уравнения (9). Формулу (36) перепишем в виде

$$\bar{N} = \frac{\int_0^{\tau_0} e^{-b\tau} S(\tau) d\tau}{\int_0^{\tau_0} e^{-b\tau} S_1(\tau) d\tau}. \quad (37)$$

Рассуждая аналогично [11],  $\bar{N}$  можно выразить через одну функцию  $N(\tau)$ , не зависящую от распределения источников:

$$\bar{N} = \frac{\int_0^{\tau_0} S_1(\tau) N(\tau) d\tau}{\int_0^{\tau_0} S_1(\tau) e^{-b\tau} d\tau}. \quad (38)$$

Функция  $N(\tau)$  определяется уравнением

$$N(\tau) = e^{-b\tau} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K_b(|\tau - \tau'|) N(\tau') d\tau'. \quad (39)$$

Величина  $e^{b\tau} N(\tau)$  есть среднее число рассеяний фотона, образовавшегося на глубине  $\tau$ .

В случае бесконечной однородной среды среднее число рассеяний фотона ограничивается лишь тем, что вероятность выживания фотона при рассеянии  $\lambda < 1$ . Когда ширина линии меняется с глубиной, существует еще один процесс, уменьшающий число рассеяний — уход фотона на бесконечность, в сторону уменьшения ширины линии.

Величины  $N(\tau)$  и  $\bar{N}$  для бесконечной среды даются выражениями

$$N(\tau) = \bar{N}e^{-b\tau}, \quad \bar{N} = \left[ 1 - \lambda U_b\left(\frac{1}{b}\right) \right]^{-1}. \quad (40)$$

Здесь

$$\begin{aligned} U_b\left(\frac{1}{b}\right) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b|\tau|} K_b(|\tau|) d\tau = \\ &= 1 - \frac{1}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx E_2\left(\int_0^{\infty} \alpha(xe^{2bt}) dt\right), \end{aligned} \quad (41)$$

где  $E_2(t)$  — вторая интегральная показательная функция. Как и в однородной среде,  $\bar{N}$  не зависит от источников. В частности, для одномерной среды и лоренцовского профиля

$$\bar{N} = \left[ 1 - \lambda + \frac{\lambda}{2V\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4b}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{4b}\right)} \right]^{-1}. \quad (42)$$

Наличие границы в среде приводит к еще одному способу выбывания фотонов из процесса рассеяния — выходу их из среды. Поступая как и в случае однородного слоя (см. [11]), получаем, что функция  $N(\tau)$  для полубесконечной среды

$$N(\tau) = e^{-b\tau} H_b\left(\frac{1}{b}\right) \Psi(\tau), \quad (43)$$

где

$$\Psi(\tau) = 1 + \int_0^{\tau} e^{b\tau'} \Phi(\tau') d\tau'. \quad (44)$$

Если источники распределены по экспоненте, т. е.  $S_1(\tau) = e^{-m\tau}$ , то нетрудно получить, что

$$\bar{N} = H_b\left(\frac{1}{b}\right) H_b\left(\frac{1}{m+b}\right). \quad (45)$$

Для однородной среды ( $b = 0$ ) (45) переходит в известное выражение

$$\bar{N} = H_0(\infty) H_0\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} H_0\left(\frac{1}{m}\right). \quad (46)$$

Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим образование спектральных линий в простейшем случае, когда удастся получить решенные уравнения переноса в явном виде.

5. *Случай одномерной среды и лоренцовского профиля.* Как отмечалось выше, определение поля излучения в одномерной среде с лоренцовским профилем коэффициента поглощения сводится к интегральному уравнению, ядерная функция которого — ряд, составленный из экспонент. В наиболее простом случае, при  $|b| = 1/4$ , ядро — просто экспонента. Знак  $b$  не влияет на „функцию источников“  $S(\tau)$ , однако интенсивность излучения зависит от него. Будем считать  $b = -1/4$  (линия расширяется вглубь среды).

При этих предположениях рассмотрим образование спектральной линии в полубесконечной одномерной атмосфере с учетом поглощения и излучения в непрерывном спектре (см. конец раздела 2). Задача сводится к решению интегрального уравнения для функции источников:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K_{-1/4}^{(1)}(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau') d\tau' + (1 - \lambda) B(\tau) e^{-\tau/4} + \beta \int_0^{\infty} K_0(\tau, \tau') B(\tau') d\tau'. \quad (47)$$

Здесь  $B(\tau)$  — функция Планка, а ядерная функция

$$K_{-1/4}^{(1)}(\tau, \beta) = \frac{1}{2} e^{-(3/4 + \beta)\tau}. \quad (48)$$

Функция  $K_0(\tau, \tau')$  дается выражениями

$$K_0(\tau, \tau') = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{(1/4 - \beta)\tau + \beta\tau'} + \frac{1}{2} e^{-(3/4 + \beta)\tau + (1 + \beta)\tau'}, & \tau > \tau', \\ e^{(3/4 + \beta)\tau - (1/2 + \beta)\tau'}, & \tau < \tau'. \end{cases} \quad (49)$$

Функции, через которые выражается решение задачи, легко находятся:

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2} \frac{e^{-(3/4 + \beta)k\tau}}{1 + k}, \quad (50)$$

$$H_{-1/4}(z) = \frac{1 + \left(\frac{3}{4} + \beta\right)z}{1 + \left(\frac{3}{4} + \beta\right)kz}. \quad (51)$$

В этих формулах

$$k = \sqrt{1 - \frac{2\lambda}{3 + 4\beta}}. \quad (52)$$

Для интенсивности выходящего из среды излучения имеем следующее выражение:

$$I(0, x) = \beta \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\beta\tau - \int_0^{\tau} \frac{dt}{1 + x^2 e^{-t}} \right\} B(\tau) d\tau + \\ + \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\left(\frac{1}{4} + \beta\right)\tau - \int_0^{\tau} \frac{dt}{1 + x^2 e^{-t}} \right\} S(\tau) \frac{d\tau}{1 + x^2 e^{-\tau}}. \quad (53)$$

Если источники распределены по экспоненциальному закону

$$B(\tau) = e^{m\tau},$$

то свободный член уравнения (47) есть сумма экспонент. Решение его  $S(\tau)$  также является суммой экспонент. Подставив  $S(\tau)$  в формулу (53), получаем, что интенсивность выходящего из среды излучения представляет собой сумму гипергеометрических функций. Для краткости мы не приводим соответствующих выражений. Отметим, что решение задачи, имеющее физический смысл, должно удовлетворять условию  $I(0, x) \rightarrow \text{const}$  при  $x \rightarrow \infty$ , что имеет место лишь при  $m < \beta$ . Это нетрудно понять и из физических соображений.

На рис. 1 изображены профили, соответствующие  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0.1$  и различным зависимостям мощности первичных источников от глубины. Как и следовало ожидать, линии очень широки.

На рис. 2 нанесены профили линий при  $\beta = 0$ ,  $\lambda = 1$  и различных источниках. Для сравнения приведены профили линий, образующихся в однородной ( $b = 0$ ) одномерной полубесконечной среде при лоренцовском профиле коэффициента поглощения. Одномерная лоренцовская  $H$ -функция при  $\lambda = 1$  рассчитывалась по формуле

$$H\left(\frac{1}{y}\right) = \left(\frac{2}{y}\right)^{1/4} \sqrt{1+y} \left(\frac{1}{2} \arcsin y\right)^{\frac{\arcsin y}{2\pi}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\arcsin y}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} - 1}{n(2n+1)!} B_n (\arcsin y)^{2n+1} \right\}, \quad (54)$$

где  $B_n = 1/6, 1/30, 1/42, \dots$  — числа Бернулли. Профили соответствуют

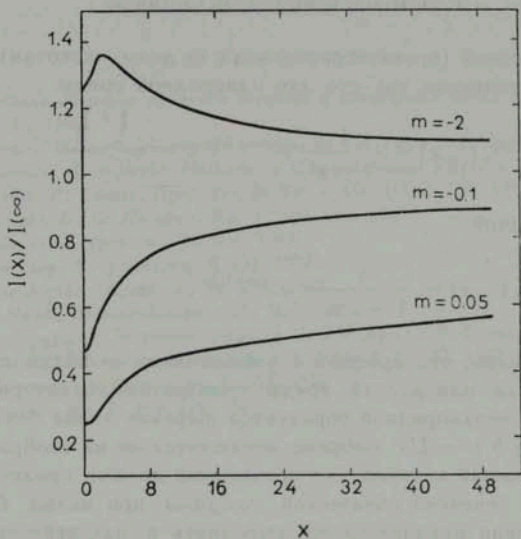


Рис. 1. Профили линий при  $b = -1/4$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\beta = 0.1$  и  $B(\tau) = e^{m\tau}$ ,  $m = -2$ ,  $-0.1$  и  $0.05$ .

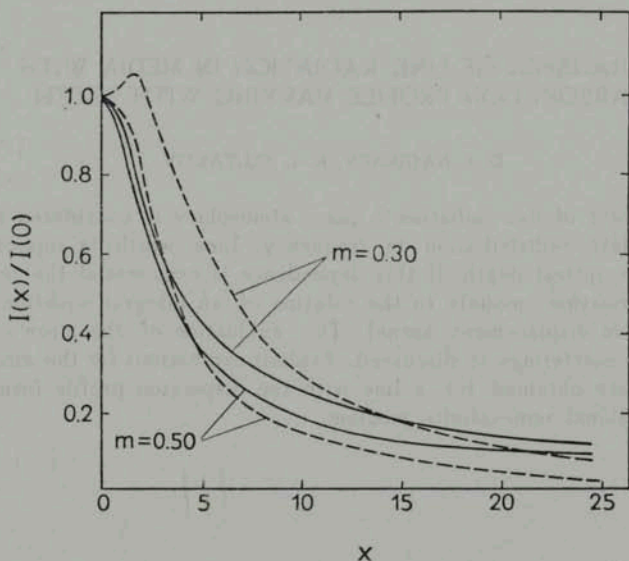


Рис. 2. Профили линий при  $\beta = 0$ ,  $\lambda = 1$  и источниках вида (55) при  $b = 0$  (пунктир) и (56) — при  $b = -1/4$  (сплошные кривые).

одинаковой полной (проинтегрированной по всем частотам) мощности первичных источников, так что для однородной среды

$$\varepsilon_0(\tau, x) = \frac{1}{1+x^2} e^{-(m-1/4)\tau}, \quad m > \frac{1}{4}, \quad (55)$$

для неоднородной

$$\varepsilon_0(\tau, x) = \frac{1}{1+x^2 e^{-\tau}} e^{-(m+1/4)\tau}, \quad m > -\frac{1}{4}. \quad (56)$$

Из рисунка видно, что профили с уменьшением  $m$  ведут себя по-разному. В случае однородной среды появляется характерный провал в центре, а в неоднородной образуется широкая линия без провала.

Значение  $b = -1/4$  выбрано исключительно из соображений простоты. Наибольший интерес для приложений должно представлять рассеяние в слое конечной оптической толщины при малых  $b$ . Работу в этом направлении предполагается выполнить в дальнейшем.

Ленинградский государственный  
университет

## TRANSFER OF LINE RADIATION IN MEDIA WITH ABSORPTION PROFILE VARYING WITH DEPTH

D. I. NAGIRNER, K. I. SELYAKOV

Transfer of line radiation in plane atmosphere is considered assuming complete redistribution in frequency. Line width is supposed to depend on optical depth. If this dependence is exponential the problem of line formation amounts to the solution of an integral equation with a symmetric displacement kernel. The evaluation of the mean number of photon scatterings is discussed. Explicit expressions for the emergent intensity are obtained for a line with the dispersion profile formed in one-dimensional semi-infinite medium.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. В. Соболев, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
2. В. В. Иванов, Перенос излучения и спектры небесных тел, Наука, М., 1969.
3. D. G. Hummer, G. Rybicki, Methods in Computational Physics, 7, 53, 1967.
4. E. H. Avrett, R. Loeser, Препринт, № 303, САО АН СССР, 1959.
5. G. V. Rybicki, D. G. Hummer, Ap. J., 150, 607, 1967.
6. В. В. Соболев, Астрон. ж., 34, 694, 1967.
7. В. В. Витязев, Астрофизика, 6, 431, 1970.
8. Т. Ф. Плешкова, Астрон. ж., 39, 235, 1962.
9. Б. Нобл, Метод Винера-Хопфа, ИЛ, М., 1962.
10. В. А. Амбарцумян, Научные труды, т. 1, АН Арм.ССР, Ереван, 1960.
11. В. В. Соболев, Астрофизика, 2, 135, 239, 1966; 3, 5, 137, 1967.
12. Д. И. Наирнер, Астрофизика, 8, 353, 1972.
13. D. G. Hummer, Ap. J., 140, 276, 1964.