АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 10 МАЙ, 1974 ВЫПУСК 2

# О СВЯЗИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И НЕПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДАХ

И. Л. КАЦЕВ, Э. П. ЗЕГЕ

Поступила 17 декабря 1973

Выяснены условия, которым должна удовлетворять функция, описывающая вероятность переизлучения фотона после его поглощения, необходимые для существования связи между нестационарными полями излучения в поглощающей и непоглощающей средах. Найден вид этой связи.

В теории нестационарного поля излучения весьма полезными оказались соотношения, которые для случая освещения среды мгновенным импульсом света связывают интенсивность излучения в среде с поглощением с интенсивностью излучения в чисто рассеивающей среде [1—4]:

$$J(\tau_i, \vec{\Omega}, u, \Lambda) = \Lambda e^{-(1-\Lambda)u} J(\tau_i, \vec{\Omega}, \Lambda u, 1) \quad \text{при} \quad t_2 = 0, \tag{1}$$

$$J(\tau_i, \vec{\Omega}, u, \Lambda) = \Lambda e^{-(1-\Lambda)u} J(\Lambda\tau_i, \vec{\Omega}, \Lambda u, 1) \quad \text{при} \quad t_1 = 0, \tag{2}$$

$$J(\tau_i, \vec{\Omega}, u, \Lambda) = \sqrt{\Lambda}\, e^{-2(1-\sqrt{\Lambda})u} J(\tau_i\sqrt{\Lambda}, \vec{\Omega}, u\sqrt{\Lambda}, 1) \quad \text{при} \quad t_1 = t_2. \tag{3}$$

Здесь $t_1$ — среднее время пребывания фотона в поглощенном состоянии, $t_2 = 1/\varepsilon v$ — среднее время нахождения фотона в пути между двумя последовательными актами рассеяния, $\varepsilon$ — коэффициент ослабления света в среде, $v$ — скорость света в среде, $u = t/(t_1 + t_2)$ — безразмерное время, $t$ — время, $\tau_i$ — совокупность оптических координат, от которых зависит световое поле, $\Lambda$ — альбедо однократного рассеяния, $\vec{\Omega}$ — единичный вектор направления распространения излучения, $J(\tau_i, \vec{\Omega}, \Lambda, u)$ — интенсивность излучения.

Соотношения (1)—(3), например, при получении численных решений позволяют резко ограничить объем необходимых расчетов. Однако они получены не только при определенных соотношениях между $t_1$ и $t_2$, но и для частного случая, когда вероятность излучения фотона в интервале от $t$ до $t+dt$, поглощенного в момент времени $t=0$, равна

$$f(t)\,dt = e^{-t/t_1}\frac{dt}{t_1}. \tag{4}$$

Поэтому естественно поставить вопрос о тех более общих условиях, которым должны удовлетворять функция $f(t)$ и соотношение между характеристическими временами $t_1$ и $t_2$, чтобы могла существовать связь такого типа.

В общем случае связь между $J(\tau_i,\ \vec{\Omega},\ t,\ \Lambda)$ и $J(\tau_i,\ \vec{\Omega},\ t,\ 1)$ можно искать в виде

$$J(\tau_i,\ \vec{\Omega},\ t,\ \Lambda) = \Phi(\Lambda,\ t)\,J(\eta_1(\tau_i),\ \vec{\Omega},\ \eta_2(t),\ 1), \tag{5}$$

где $\Phi(\Lambda,\ t)$, $\eta_1(\tau_i)$, $\eta_2(t)$ — некоторые неизвестные функции. Заметим, что функция $\Phi(\Lambda,\ t)$ не должна зависеть от $\tau_i$ и $\vec{\Omega}$, так как искомая связь должна быть единой для всех точек среды и для любой геометрии рассеивающего объема.

Очевидно, что если такая связь существует, то она имеет место также для функций, являющихся решением однородного уравнения переноса

$$\vec{\Omega}\operatorname{grad}_{\tau} J + t_2\frac{\partial J}{\partial t} = -J + \frac{\Lambda}{4\pi}\int\limits_0^t f(t-t')\,dt'\int\limits_{4\pi} J(\vec{\Omega}',\ t')\,x(\vec{\Omega},\ \vec{\Omega}')\,d\vec{\Omega}'. \tag{6}$$

Здесь $x(\vec{\Omega},\ \vec{\Omega}')$ — индикатриса рассеяния, нормированная соотношением $\frac{1}{4\pi}\int\limits_{4\pi} x(\vec{\Omega},\ \vec{\Omega}')\,d\vec{\Omega}'=1$, а функция $f(t)$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int\limits_0^\infty f(t)\,dt = 1. \tag{7}$$

Теперь учтем, что в силу инвариантности уравнения (6) относительно сдвига по $t$ временная часть его решения имеет экспоненциальный вид при любых значениях $\Lambda$ [5]. С учетом этого обстоятельства соотношение (5) может выполняться только при

$$\Phi(\Lambda, t) = Ae^{-\xi t}, \quad \tau_{i2}(t) = mt, \tag{8}$$

где $A$, $\xi$, $m$ — некоторые величины, не зависящие от $t$. Таким образом,

$$J(\tau_i, \vec{\Omega}, t, \Lambda) = Ae^{-\xi t} J[\tau_{i1}(\tau_i), \vec{\Omega}, mt, 1]. \tag{9}$$

Для нахождения $A$, $\xi$, $m$, $\tau_{i1}(\tau_i)$ и ограничений, налагаемых на функцию $f(t)$, воспользуемся легко находимой связью между преобразованием Лапласа по $t$ от $J(\tau_i, \vec{\Omega}, t, \Lambda)$ и решением соответствующего стационарного уравнения переноса.

Применим к уравнению (6) преобразование Лапласа по времени $t$. Тогда после несложных преобразований получим:

$$\vec{\Omega}\,\mathrm{grad}_{\vec{\tau}'}\bar{J} = -\bar{J} + \frac{\Lambda'}{4\pi}\int_{4\pi}\bar{J}(\vec{\Omega}')x(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')\,d\vec{\Omega}', \tag{10}$$

где $\bar{J} = L[J(t)]$, $L$ — оператор преобразования Лапласа по переменной $t$,

$$\tau' = \tau(1 + t_2 p), \quad \Lambda' = \frac{\Lambda\bar{f}(p)}{1 + t_2 p},$$

$p$ — параметр преобразования.

Из (10) видно, что

$$L[J(\tau_i, \vec{\Omega}, t, \Lambda)] = J_{cm}\left[\tau_i(1 + t_2 p),\ \vec{\Omega},\ \frac{\Lambda\bar{f}(p)}{1 + t_2 p}\right], \tag{11}$$

где $J_{cm}(\tau_i, \vec{\Omega}, \Lambda)$ — решение соответствующей задачи в стационарном случае.

Соотношение (11) было получено ранее в [6].

С учетом (11) и свойства подобия преобразования Лапласа [7] получим

$$L[J(\tau_{i1}(\tau_i), \vec{\Omega}, mt, 1] = \frac{1}{m} J_{cm}\left[\tau_{i1}(\tau_i)\left(1 + t_2\frac{p}{m}\right),\ \vec{\Omega},\ \frac{\bar{f}\left(\frac{p}{m}\right)}{1 + t_2\frac{p}{m}}\right]. \tag{12}$$

С другой стороны, из (9) и (11) имеем

$$L[J(\eta_1(\tau_i),\ \vec{\Omega},\ mt,\ 1)] = \frac{1}{A} J_{cm}\left[\tau_i(1 + t_2(p-\xi)),\ \vec{\Omega},\ \frac{\Lambda\bar{f}(p-\xi)}{1+t_2(p-\xi)}\right]. \quad (13)$$

Сопоставляя (12) и (13), получаем

$$A = m, \quad (14)$$

$$\left(1 + t_2\frac{p}{m}\right)\eta_1(\tau_i) = \tau_i[1 + t_2(p-\xi)], \quad (15)$$

$$\frac{\bar{f}(p/m)}{1 + t_2 p/m} = \frac{\Lambda\bar{f}(p-\xi)}{1 + t_2(p-\xi)}. \quad (16)$$

Решение системы уравнений (14)—(16) должно определить вид функций $f(t)$, для которых возможен переход (9), а также величины $A$, $m$, $\xi$, $\eta_1(\tau_i)$.

Рассмотрим класс функций $f(t)$, для которых возможно представление в виде:

$$f(t) = t^{\nu}\varphi(t), \quad 0 < \varphi(t=0) < \infty, \quad \nu > -1. \quad (17)$$

Очевидно, этот класс достаточно общий и включает в себя практически все физически реализуемые ситуации (за исключением случая $f(t) = \delta(t)$, который будет рассмотрен отдельно).

Рассмотрим два случая.

I. $t_2 = 0$, т. е. временем пробега фотона между актами рассеяния можно пренебречь.

Обратное преобразование Лапласа от (16) в этом случае дает

$$mf(mt) = \Lambda e^{\xi t} f(t) \quad (18)$$

или, с учетом (17),

$$m^{\nu+1}\varphi(mt) = \Lambda e^{\xi t}\varphi(t). \quad (19)$$

Полагая $t = 0$ и учитывая (14), имеем

$$A = m = \Lambda^{1/(\nu+1)}. \quad (20)$$

Теперь от функционального уравнения

$$\varphi(mt) = e^{\xi t}\varphi(t), \quad (21)$$

которое получается из (19) с учетом (20), перейдем к дифференциальному. Для этого продифференцируем (21) по $m$.

$$t\frac{d\varphi(mt)}{d(mt)} = t\varphi(mt)\frac{d\xi}{dm}, \quad (22)$$

или

$$\frac{1}{\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{d\xi}{dm}. \tag{23}$$

Так как левая и правая части уравнения (23) зависят от разных переменных, то

$$\frac{1}{\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{d\xi}{dm}=-\frac{1}{t_1},\quad \text{где } t_1=\text{const}. \tag{23$'$}$$

Из (20) и (21) получаем, что при $\Lambda=1$, $m=1$, $\xi=0$.

Тогда с учетом (23′) решение функциональных уравнений (21) и (18) имеет вид

$$\xi=\frac{1-m}{t_1},\qquad \varphi(t)=Ce^{-t/t_1},\quad f(t)=Ct^{\nu}e^{-t/t_1}. \tag{24}$$

Константа $C$ находится из условия нормировки (7).

$$f(t)=\frac{t^{\nu}e^{-t/t_1}}{t_1^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)}. \tag{25}$$

Из уравнения (15) при $t_2=0$ имеем

$$\eta_1(\tau_i)=\tau_i. \tag{26}$$

Таким образом, при $t_2=0$ соотношение (9) выполняется только для функций типа (25). Если ввести безразмерное время $u=t/t_1$, то при $\nu=0$ соотношение (9) с учетом полученных выше выражений для $A$, $m$, $\xi$, $\eta_1(\tau_i)$ переходит в (1).

II. $t_2\neq 0$. Из (15), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $p$, находим:

$$\eta_1(\tau_i)=m\tau_i,\quad \xi=(1-m)/t_2. \tag{27}$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа от (16), получим [8]:

$$\frac{m^2}{t}\int_0^t e^{-m(t-t')/t_2}f(mt')\,dt'=\frac{\Lambda}{t_2}e^{(\xi-1/t_2)t}\int_0^t e^{t'/t_2}f(t')\,dt', \tag{28}$$

или, с учетом (27),

$$m^2\int_0^t e^{mt'/t_2}f(mt')\,dt'=\Lambda\int_0^t e^{t'/t_2}f(t')\,dt'. \tag{29}$$

Теперь рассмотрим два случая:

а) $f(t) = \delta(t)$, т. е. временем задержки кванта света в поглощенном состоянии можно пренебречь.

Подставляя $f(t) = \delta(t)$ в (29) и учитывая (14), (27), имеем

$$A = m = \Lambda, \quad \xi = (1-\Lambda)/t_2, \quad \eta_1(\tau_i) = \Lambda\tau_i. \tag{30}$$

Если ввести безразмерное время $u = t/t_2$, то соотношение (9) с учетом (30) совпадает с (2).

б) $f(t) \neq \delta(t)$.

Продифференцируем уравнение (29) по $t$ и учтем представление (17)

$$m^{\nu+2}\varphi(mt) = \Lambda e^{(1-m)/t_2}\varphi(t). \tag{31}$$

Функциональное уравнение (31) аналогично (19). Поэтому сразу запишем его решение:

$$m = \Lambda^{1/(\nu+2)}, \quad \xi = (1-m)/t_1, \quad \varphi(t) = Ce^{-t/t_1}. \tag{32}$$

Для функции $f(t)$, с учетом (32), (17) и условия нормировки (2), снова получаем выражение (25). Кроме того, из (14), (27) и (30) имеем

$$A = m = \Lambda^{1/(\nu+2)}, \quad \eta_1(\tau_i) = \Lambda^{1/(\nu+2)}\tau_i, \quad t_1 = t_2, \quad \xi = (1-\Lambda)/t_2. \tag{33}$$

При $\nu = 0$, $u = t/2t_2$ выражение (9) с учетом (33) совпадает с соотношением (3).

Таким образом, в случае нестационарного поля излучения связь между фотометрическими характеристиками в поглощающей среде с соответствующими величинами в среде без поглощения может иметь место только в тех случаях, когда функция $f(t)$ имеет вид (25) (либо $f(t) = \delta(t)$ при $t_2 \neq 0$). Причем, если $t_2 \neq 0$, то характерное время $t_1$ излучения кванта после поглощения должно быть равно среднему времени $t_2$, проводимому квантом в пути между двумя последовательными рассеяниями.

Институт физики
АН БССР

# ON THE CONNECTION BETWEEN NONSTATIONARY RADIATION FIELDS IN ABSORBING AND NONABSORBING MEDIA

I. L. KATSEV, E. P. ZEGE

The conditions required for the existanse of connection between the nonstationary radiation fields in absorbing and nonabsorbing media and the type of this connection are revealed.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *I. Kuščer, P. F. Zweifel*, J. Math. Phys., 6, 1125, 1965.
2. *Л. М. Романова*, Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1, № 6, 1965.
3. *В. Ю. Теребиж*, Астрофизика, 4, 141, 1968.
4. *И. Н. Минин*, в сб. „Теоретические и прикладные проблемы рассеяния света“, Наука и техника, Минск, 1971.
5. *К. Кейз, П. Цвайфель*, Линейная теория переноса, Мир, М., 1972.
6. *И. Н. Минин*, Вестн. ЛГУ, № 19, 124, 1962.
7. *Г. Корн. Т. Корн*, Справочник по метематике для научных работников и инженеров, Наука, М., 1970.
8. *Г. Деч*, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Наука, М., 1971.