А С Т Р О Ф И З И К А

ТОМ 22 ИЮНЬ, 1985 ВЫПУСК 3

УДК: 524.5—355+536.7

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ РОССЕЛАНДА

А. М. СОБОЛЕВ, В. С. СТРЕЛЬНИЦКИЙ, Н. Н. ЧУГАЙ

Поступила 18 июня 1984
Принята к печати 20 января 1985

Приводится доказательство теоремы Росселанда для любых областей спектра основанное на использовании яркостной температуры для описания неравновесного поля излучения. При таком способе доказательства выявляется простой термодинамический смысл теоремы.

1. *Введение.* Классическим объяснением флуоресценции газовых туманностей в оптических линиях атомов является теорема Росселанда [1—3]: в трехуровенной квантовой системе (рис. 1), находящейся в поле

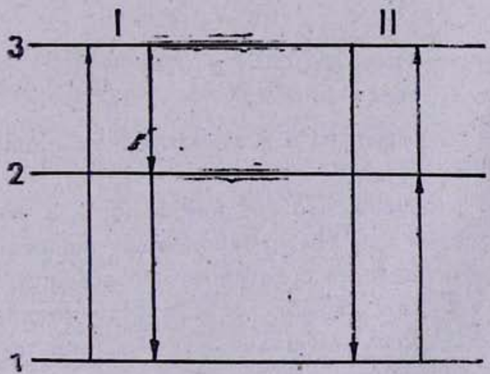

Рис. 1. Прямые (I) и обратные (II) циклы переходов в трехуровенной системе.

дилютированного планковского излучения, прямые циклы (1—3—2—1) идут чаще обратных (1—2—3—1). Обычно теорему Росселанда доказывают, прослеживая решение уравнений стационарности для населенностей уровней [1], либо (что близко по смыслу) непосредственным подсчетом и сравнением вероятностей прямых и обратных циклов [2, 3]. К сожалению, такой кинетический подход оставляет в тени простой и наглядный термодинамический смысл этой важной в методическом отношении теоремы. Представляется поэтому полезным дополнить традиционные кинетические способы доказательства термодинамическим способом, основанным на использовании температурных параметров для описания полей излучения и населенностей уровней. Таким способом в работе [4] теорема Росселанда была доказана для виновской области спектра, которой можно ограничиться при анализе оптической флуоресценции газовых туманностей. Однако в методическом отношении интересно рассмотреть и противоположный предельный случай — рэлей-джинсовскую область, а также весь спектр в целом. Такой более общий термодинамический анализ теоремы Росселанда, а также более строгое обоснование самого термодинамического подхода — цель данной статьи.

2. *Термодинамическое условие преобладания прямых (обратных) циклов.* Рассмотрим взаимодействие фотонов с трехуровенной системой в том приближении, которое обычно принимается при доказательстве теоремы Росселанда: слой газа оптически тонок во всех трех линиях; ширина каждой линии пренебрежимо мала по сравнению с ее частотой; столкновительными переходами можно пренебречь по сравнению с радиативными; вероятности радиативных переходов не зависят от направления и состояния поляризации излучения и определяются только его плотностью ρ. Для описания зависимости ρ от частоты ν введем среднюю яркостную температуру $T(\nu)$, определяемую соотношением:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\left(e^{\frac{E(\nu)}{T(\nu)}} - 1\right)^{-1}, \tag{1}$$

где $E = h\nu$, T — температура в энергетических единицах, а константы имеют обычный смысл.

В работе [4] показано, что средняя яркостная температура характеризует поле излучения как квазиравновесный тепловой резервуар, в том смысле, что оно обменивается с квантовым переходом, имеющим температуру возбуждения T_x, по обычному правилу термодинамики: энергия передается от объекта с меньшим значением обратной температуры к объекту с бо́льшим ее значением. Эти представления позволили вывести следующие необходимые и достаточные условия преобладания в трехуровенной системе прямых (верхний знак неравенства) или обратных (нижний знак неравенства) циклов:

$$\frac{E_{12}}{T(\nu_{12})} + \frac{E_{23}}{T(\nu_{23})} - \frac{E_{13}}{T(\nu_{13})} \gtrless 0. \tag{2}$$

В работе [4] $T(\nu)$ рассматривалась просто как удобный параметр; вопрос о том, можно ли эту величину считать термодинамической температурой (т. е. может ли ее обратная величина быть представлена как производная от энтропии соответствующей макроскопической подсистемы по ее энергии) не исследовался. Ниже будет показано, что в принятом здесь приближении такое представление действительно возможно, и благодаря этому условия (2) могут быть записаны сразу, на основании II начала термодинамики.

Мы исходим из выражения для энтропии неравновесного бозе-газа [5], которое для фотонов частоты ν в расчете на единичный интервал частот и на единицу объема запишется так:

$$S_\nu = (G_\nu + N_\nu)\ln(G_\nu + N_\nu) - G_\nu \ln G_\nu - N_\nu \ln N_\nu, \tag{3}$$

где $N_\nu = \rho(\nu)/h\nu$ — число фотонов, а $G_\nu = 8\pi\nu^2/c^3$ — число их возможных квантовых состояний на единицу объема и единичный интервал частот. Изменение энтропии поля излучения, обусловленное поглощением или излучением одного фотона, очевидно, равно

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial N_\nu} = \ln\left(1 + \frac{G_\nu}{N_\nu}\right) = \ln\left(1 + \frac{8\pi h\nu^3}{c^3\rho(\nu)}\right). \tag{4}$$

Воспользовавшись определением средней яркостной температуры (1), перепишем (4) так:

$$\frac{\partial S_\nu}{\partial N_\nu} = \frac{E(\nu)}{T(\nu)}. \tag{5}$$

Соотношение (5) показывает, что в рассматриваемом приближении средняя яркостная температура действительно является полноценной термодинамической температурой, определяющей изменения энтропии фотонного газа, связанные с излучением и поглощением отдельных фотонов. При этом вскрывается простой смысл неравенств (2): они выражают условие возрастания энтропии при выполнении необратимого цикла переработки излучения квантовой системой. Таким образом, с учетом (5) неравенства (2) можно было бы записать сразу, на основании II начала термодинамики.

Подставив в (2) очевидное равенство $E_{13} = E_{12} + E_{23}$, легко убедиться в том, что *достаточным* условием преобладания прямого (обратного) цикла является монотонное убывание (возрастание) $T^{-1}(\nu)$ с ν:

$$\left[\frac{1}{T(\nu)}\right]' \lessgtr 0. \tag{6}$$

3. *Виновская и рэлей-джинсовская области спектра.* Итак, для доказательства теоремы Росселанда достаточно убедиться в том, что дилютированное планковское излучение обладает свойством (6) с верхним знаком неравенства.

Рассмотрим сначала предельные случаи — рэлей-джинсовскую и виновскую области спектра. Плотность дилютированного планковского излучения равна

$$\rho(\nu) = W\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}(e^{E(\nu)/T_*} - 1)^{-1}, \tag{7}$$

где T_* — температура источника, $W < 1$ — фактор дилюции. Из (1) и (7) для виновской области спектра, $E \gg T_* > T(\nu)$, находим:

$$\frac{1}{T(\nu)} \simeq \frac{1}{T_*} - \frac{1}{E(\nu)}\ln W, \tag{8}$$

откуда непосредственно видно, что $1/T(\nu)$ монотонно убывает с ν. Это доказывает теорему для виновской области спектра.

В рэлей-джинсовской области, $E \ll T(\nu) < T_*$, ограничившись членом первого порядка в разложении экспоненты по степеням, получим из (1) и (7):

$$\frac{1}{T(\nu)} \simeq \frac{1}{WT_*}. \tag{9}$$

Таким образом, в первом приближении $T(\nu)$ вообще не зависит от ν в рэлей-джинсовской области, т. е. в данном случае циклические процессы превращения фотонов практически сведены к нулю.

4. *Доказательство теоремы Росселанда для всего спектра*. Теперь покажем, что условие (6) выполняется для всего спектра. Из (1) и (7) получаем следующее явное выражение для $1/T(\nu)$:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{E}\ln\left[1 + \frac{1}{W}(e^{E/T_*} - 1)\right]. \tag{10}$$

Дифференцирование дает:

$$\frac{d}{dE}\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\frac{E}{WT_*}e^{E/T_*} - y\ln y}{E^2 y}, \tag{11}$$

где $y = 1 + (e^{E/T_*} - 1)/W$. Знаменатель в (11) положителен при всех E. Оба слагаемых в числителе (обозначим их f_1 и f_2) положительны при всех E и равны нулю при $E = 0$, однако производная $df_1/dE < df_2/dE$ для всех $E > 0$ и $W < 1$:

$$\frac{d(f_1 - f_2)}{dE} = \frac{1}{WT_*}e^{E/T_*}\ln\left[\frac{1 + (e^{E/T_*} - 1)}{1 + \frac{1}{W}(e^{E/T_*} - 1)}\right] < 0.$$

Следовательно, для всех $E>0$ и $W<1$ имеем $f_1<f_2$, т. е. $d(1/T)/dE<0$, что и требовалось доказать.

5. *Количественные оценки.* Переход на температурный язык делает более наглядным также вывод количественных оценок эффекта. Воспользуемся формулой для отношения скоростей прямых и обратных радиационных переходов, легко выводимой с помощью соотношения (1) и известных соотношений между коэффициентами Эйнштейна (см., например, [4]):

$$\frac{R_{ik}}{R_{ki}}=\frac{B_{ik}\rho_{ik}}{B_{ki}\rho_{ik}+A_{ki}}=\exp\left(-\frac{E_{ik}}{T(\nu_{ik})}\right). \tag{12}$$

С помощью (12) отношение вероятностей прямых и обратных циклов выражается следующей наглядной формулой:

$$\frac{N_{\mathrm{I}}}{N_{\mathrm{II}}}=\frac{R_{13}R_{32}R_{21}}{R_{31}R_{23}R_{12}}=\exp\left(-\frac{E_{13}}{T(\nu_{13})}+\frac{E_{23}}{T(\nu_{23})}+\frac{E_{21}}{T(\nu_{21})}\right), \tag{13}$$

показывающей, что степень преобладания одних циклов над другими экспоненциально зависит от разности энтропий исходных и конечных фотонов. Подставляя в (13) выражение $E/T(\nu)$ согласно (8) и (9), получаем количественную оценку эффекта: для виновской области $N_{\mathrm{I}}/N_{\mathrm{II}}\simeq\simeq 1/W$, для рэлей-джинсовской — $N_{\mathrm{I}}/N_{\mathrm{II}}\simeq 1$.

Обычно указывают, что термодинамической причиной преобладания прямых циклов над обратными является несоответствие средней яркостной температуры излучения $T(\nu)$ его цветовой температуре T_*. При этом может возникнуть естественное предположение, что эффект больше в той области спектра, где $T(\nu)$ и T_* различаются сильнее. Это, однако, неверно: количественно эффект оказывается максимальным как раз там, где различие $T(\nu)$ и T_* минимально (виновская область), и асимптотически стремится к нулю в рэлей-джинсовской области, где это различие максимально. Например, при $E_{12}\approx E_{23}$ 0.5 E_{13} из (13) получаем

$$\ln(N_{\mathrm{I}}/N_{\mathrm{II}})\approx -E^2\frac{d}{dE}\left(\frac{1}{T}\right),$$

где $E=(E_{13}+E_{12})/2\approx 0.75\ E_{13}$. В рэлей-джинсовской области $E\to 0$ и $(1/T)'\to 0$, поэтому $N_{\mathrm{I}}/N_{\mathrm{II}}\to 1$. В виновской области $(1/T)'\to\to\ln W/E^2$ и, следовательно, $N_{\mathrm{I}}/N_{\mathrm{II}}\to 1/W$.

Астрономический совет
АН СССР

THE THERMODYNAMIC PROOF OF ROSSELAND'S THEOREM

A. M. SOBOLEV, V. S. STRELNITSKY, N. N. CHUGAI

The proof of Rosseland's theorem for any area of spectra has been rendered, based on the use of brightness temperature for the description of the nonequilibrium radiation field. Such a proof elucidates a simple thermodynamic sense of the theorem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Rosseland*, Ap. J., **63**, 218, 1926.
2. *В. А. Амбарцумян*, Теоретическая астрофизика, ГОНТИ, Л., 1939, стр. 146.
3. *В. В. Соболев*, Курс теоретической астрофизики, Наука, М., 1967, стр. 287.
4. *В. С. Стрельницкий*, Научные информации Астросовета АН СССР, вып. 52, 75, 1983.
5. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*, Статистическая физика, Наука, М., 1967, стр. 181.