АСТРОФИЗИКА

ТОМ 24 АПРЕЛЬ, 1986 ВЫПУСК 2

УДК: 521.3

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

К ОЦЕНКЕ ОРБИТАЛЬНОГО ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА

В работе астрономических работ встречается понятие орбитального эксцентриситета. Это очень важное понятие, так как оно служит для наглядного представления вытянутости орбиты данного астрономического объекта. В настоящей работе автор попытался сформулировать полезный критерий для приблизительного определения орбитального эксцентриситета в сферически-симметричных звездных системах. Под эксцентриситетом будем подразумевать следующую величину:

$$e=\frac{r_a-r_p}{r_a+r_p},$$

где r_a и r_p — максимальное и минимальное расстояния объекта от центра системы (расстояния апоцентра и перицентра), соответственно.

Как известно, для объектов, движущихся в сферически-симметричном поле сил, существует интеграл энергии

$$\frac{1}{2}(v_r^2+v_t^2)-\Pi=E. \quad (1)$$

В формуле (1) v_r и v_t представляют собой радиальную (вдоль радиуса системы) и трансверсальную составляющие скорости объекта, E-полная энергия единицы массы и Π—потенциал системы. Выразим с помощью (1) квадрат радиальной составляющей, причем v_t представим через момент импульса единицы массы J, $J=rv_t$, где через r обозначено расстояние объекта. Разделяя полученное выражение на v^2, получаем долю радиальной составляющей в полной кинетической энергии объекта

$$y=1-\frac{J^2}{2(E+\Pi)r^2}. \quad (2)$$

Не нарушая общности рассуждений предположим, что масса системы распределена по закону

$$\mathfrak{M}(r) = ar^{\beta}, \tag{3}$$

где показатель степени β заключен в пределах 0—3. Пределы соответствуют точечной массе системы и равномерному распределению массы, соответственно. В этом случае потенциал системы определяется выражениями

$$\beta = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad \beta \neq 1$$

$$\Pi = u^2\left(1 + \ln\frac{r_{max}}{r}\right); \qquad \Pi = \frac{\beta}{\beta - 1}\cdot\frac{G\mathfrak{M}}{r_{max}} - \frac{G\mathfrak{M}}{r^{\beta}_{max}}\cdot\frac{r^{\beta-1}}{\beta - 1}, \tag{4}$$

где G представляет собой постоянную тяготения, $\mathfrak{M}$ полную массу системы, r_{max} — предельный радиус системы (максимальное апоцентрическое расстояние) и u — круговую скорость

$$u^2 = \frac{G\mathfrak{M}(r)}{r}, \tag{5}$$

являющуюся постоянной для случая $\beta = 1$.

Ограничимся случаем $E < 0$ и выразим энергию единицы массы через среднее расстояние объекта, $\bar{r} = \frac{r_a + r_p}{2}$. Таким образом получим

$$E = \frac{1}{2}v^2(\bar{r}) - \Pi(\bar{r}). \tag{6}$$

Затем выразим квадрат скорости объекта, соответствующей его среднему расстоянию, через квадрат круговой скорости, соответствующей тому же расстоянию,

$$\beta = 1 \qquad v^2(\bar{r}) = f_1(e)\, u^2(\bar{r});$$

$$\beta \neq 1 \qquad v^2(\bar{r}) = \frac{f_{\beta}(e)}{\beta - 1}u^2(\bar{r}),$$

где $f_1(e)$ и $f_{\beta}(e)$ — некоторые функции эксцентриситета. Подставляя в (6) последние выражения и имея в виду (4), для энергии получим

$$\beta = 1 \qquad E = \frac{1}{2}f_1(e)\, u^2 - u^2\left(1 + \ln\frac{r_{max}}{\bar{r}}\right),$$

$$\beta \neq 1 \qquad E = \frac{1}{2}\,\frac{f_{\beta}(e)}{\beta - 1}u^2(\bar{r}) - \frac{\beta}{\beta - 1}\cdot\frac{G\mathfrak{M}}{r_{max}} + \frac{G\mathfrak{M}}{r^{\beta}_{max}}\cdot\frac{\bar{r}^{\beta-1}}{\beta - 1}.$$

Для случая $\beta \neq 1$ формулу (5) можно переписать так:

$$u^2(\bar{r}) = \frac{G\mathfrak{M}}{r_{\max}^{\beta}} \cdot \bar{r}^{\beta-1},$$

имея в виду (3), а для случая $\beta = 1$, как выше упомянуто, круговая скорость является постоянной. Таким образом, для энергии окончательно получим

$$\begin{aligned} &\beta = 1 \quad E = u^2\left[\frac{f_1(e)}{2} - (1 + \ln r_{\max}) + \ln \bar{r}\right], \\ &\beta \neq 1 \quad E = \frac{G\mathfrak{M}}{(\beta-1)\, r_{\max}}\left[\left(\frac{\bar{r}}{r_{\max}}\right)^{\beta-1} \cdot \left(\frac{1}{2} f_{\beta}(e) + 1\right) - \beta\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Используя интеграл энергии и тот факт, что при расстояниях апоцентра и перицентра радиальная составляющая скорости обращается в нуль, для квадрата момента импульса единицы массы, учитывая (7), получим

$$\beta = 1 \quad J^2 = \begin{cases} 2\bar{r}^2 (1+e)^2 u^2 \left[\dfrac{1}{2} f_1(e) - \ln(1+e)\right], \\ \text{или} \\ 2\bar{r}^2 (1-e)^2 u^2 \left[\dfrac{1}{2} f_1(e) - \ln(1-e)\right], \end{cases}$$

$$\beta \neq 1 \quad J^2 = \begin{cases} 2\bar{r}^2 (1+e)^2 \dfrac{G\mathfrak{M}}{(\beta-1)\, r_{\max}} \cdot \left(\dfrac{\bar{r}}{r_{\max}}\right)^{\beta-1} \left[\dfrac{1}{2} f_{\beta}(e) + 1 - (1+e)^{\beta-1}\right] \\ \text{или} \\ 2\bar{r}^2 (1-e)^2 \dfrac{G\mathfrak{M}}{(\beta-1)\, r_{\max}} \cdot \left(\dfrac{\bar{r}}{r_{\max}}\right)^{\beta-1} \left[\dfrac{1}{2} f_{\beta}(e) + 1 - (1-e)^{\beta-1}\right]. \end{cases} \tag{8}$$

В этих альтернативных выражениях знак «+» соответствует определению момента импульса через расстояние апоцентра, а знак «—» через расстояние перицентра. Так как оба альтернативных выражения должны равняться друг другу, приравнивая их, находим аналитический вид функций $f_1(e)$ и $f_{\beta}(e)$

$$f_1(e) = \frac{(1+e)^2 \ln(1+e) - (1-e)^2 \ln(1-e)}{2e}$$

$$f_{\beta}(e) = \frac{(1-e)^2[1-(1-e)^{\beta-1}] - (1+e)^2[1-(1+e)^{\beta-1}]}{2e}.$$

Подставляя выражения (4), (7) и (8) в (2) и вводя новую переменную x, $x=\frac{r}{r}$, получаем

$$\beta=1 \qquad y=1-\frac{(1\pm e)^2\left[\frac{1}{2}f_1(e)-\ln(1\pm e)\right]}{x^2\left[\frac{1}{2}f_1(e)-\ln x\right]};$$

$$\beta\neq 1 \qquad y=1-\frac{(1\pm e)^2\left[\frac{1}{2}f_\beta'(e)+1-(1\pm e)^{\beta-1}\right]}{x^2\left[\frac{1}{2}f_\beta(e)+1-x^{\beta-1}\right]}, \tag{9}$$

где знаки «+» и «—», по-прежнему, соответствуют расстояниям апоцентра и перицентра, соответственно. Последнюю величину можно использовать для оценки эксцентриситета данного объекта, так как она при данном значении x зависит только от эксцентриситета и параметра β. Итак, при использовании данного метода вычисления нет необходимости использовать другие величины, характеризующие распределение массы в даннной звездной системе. Распределение массы (3) является со своей стороны довольно общим, и практически каждый закон распределения можно охарактеризовать этим распределением. На рис. 1 изображена функция $y(x)$ для

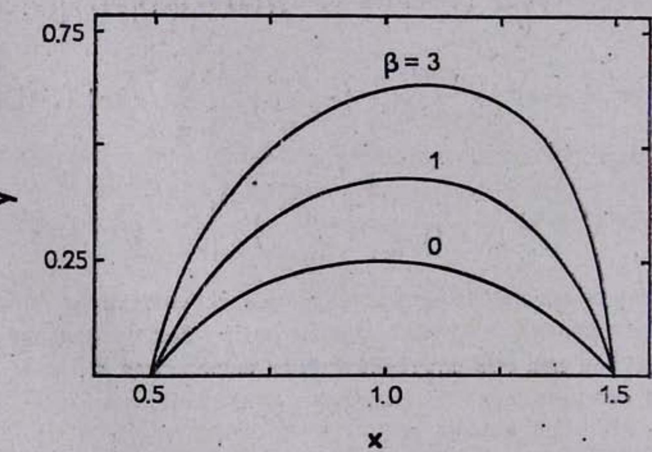

Рис. 1. График функции $y(x)$ для $e=0.5$ при значениях $\beta=0$, 1 и 3.

данного значения эксцентриситета $e=0.5$ в зависимости от параметра β. Как видно из рисунка, с увеличением β увеличивается максимум функции и в то же время нарушается полная симметрия относительно значения $x=1$, существующая при $\beta=0$, так что функция $y(x)$ сохраняет значения, близкие к максимуму, в области между средним расстоянием и апоцентром более долго, чем в области между перицентром и средним расстоянием. Последнее свойство значительно, потому что, как известно, каждый объект звездной системы движется около своего апоцентра, более медленно, чем около перицентра, и тем самым вероятность найти его близко к перицентру мала. Из этого можно сделать вывод о том, что функция $y(x)$ довольно долго сохраняет почти постоянное значение, близкое к максимальному и зависящее только от орбитального эксцентриситета. Это видно и из рис. 2, дающего ход функции для одних и тех же значений эксцен-

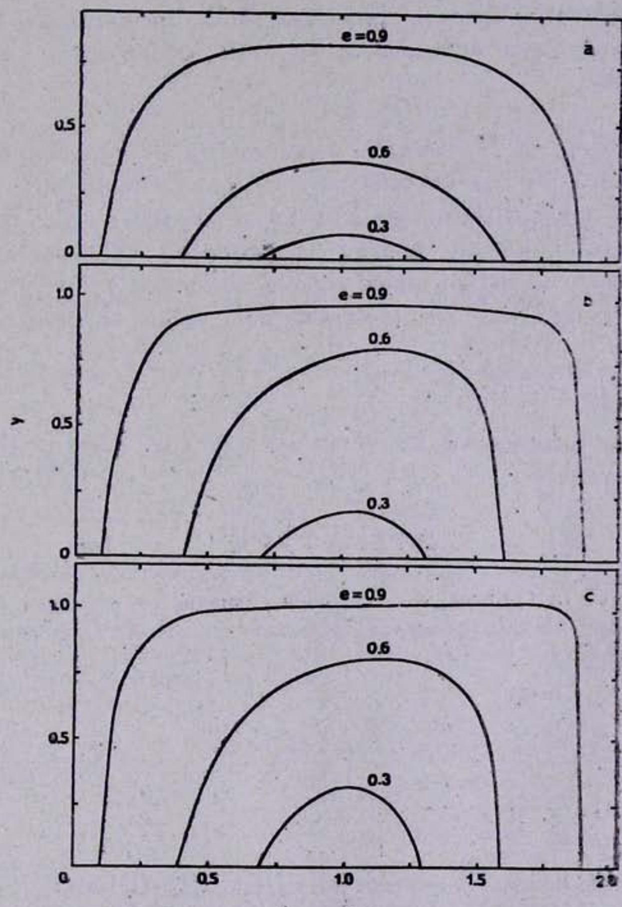

Рис. 2. График функции $y(x)$ для значений эксцентриситета 0.3, 0.6 и 0.9 при постоянном значении параметра: а) $\beta=0$, b) $\beta=1$, c) $\beta=3$.

триситета, но при различных значениях β. Значение $\beta = 1$ стало весьма актуальным в последнее время в связи с, так называемой, проблемой галактических корон (например, Антонов и др. [1]).

Основным выводом является то, что на практике можно использовать мгновенное значение величины y для определенного объекта данной звездной системы, если нам известны все составляющие его скорости и значение параметра β. Это позволит указать, по крайней мере, нижний предел орбитального эксцентриситета данного объекта. Дело в том, что y для данного значения эксцентриситета не может превзойти определенный максимум (см. рис. 1, 2). Отождествление этого максимума с мгновенным значением даст нам нижний предел. Между тем, так как функция $y(x)$ является почти постоянной, этот нижний предел мало отличается от действительного эксцентриситета. Для будущего предлагается применить сформулированный здесь критерий к объектам сферической подсистемы нашей Галактики.

On Evaluating of the Orbital Eccentricity. A criterion for orbital eccentricity evaluating for objects moving in a spherically symmetric force field with mass distribution $\mathfrak{M}(r) \propto r^{\beta}$, based on the radial component rate in total kinetic energy is proposed. The latter quantity preserves a nearly constant value over a sufficiently large fraction of the orbit, admitting thus its instantaneous value to be a measure of the eccentricity.

6 декабря 1984

Астрономическая обсерватория,
Белград, Югославия

С. НИНКОВИЧ

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. А. Антонов, Л. П. Осипков, А. Д. Чернин*, Динамика и эволюция звездных систем, вып. 4, сер. «Проблемы исслед. Вселенной», ред. К. Ф. Огородников, М.—Л., 1975, стр. 289.

УДК: 524—327

УСТОЙЧИВОСТЬ ПУЛЬСИРУЮЩЕЙ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ МОДЕЛИ ЗВЕЗДНОЙ СИСТЕМЫ

Устойчивость нестационарных, сферически-симметричных, гравитирующих систем по отношению к переходу в эллипсоид зависит от величины хаотических движений [1, 2] и от момента вращения. Если хаотические движения противодействуют этому переходу, то вращение способствует