АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 8 ФЕВРАЛЬ, 1972 ВЫПУСК 1

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ШАРЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ИСТОЧНИКОВ

При рассмотрении задач переноса излучения в среде, оптические свойства которой обладают сферической симметрией, обычно предполагается, что распределение источников также является сферически симметрическим. Такие задачи имеют широкий круг астрофизических применений (протяженные фотосферы, планетарные туманности и т. д.). Однако не менее важные применения имеет задача переноса в сферически-симметрической среде, при произвольном распределении внутренних и внешних источников (тесные пары, атмосферы планет, вспыхивающие звезды и т. д.).

В данной статье нами будет рассмотрена простейшая задача такого рода—когерентное и изотропное рассеяние в однородном шаре.

Пусть шар S_R радиуса R равномерно заполнен рассеивающими атомами. Выделим на границе ∂S_R шара элементарную площадку $d\sigma$. Нас будет интересовать определение вероятности того, что квант, поглощенный в некоторой внутренней точке M, после ряда рассеяний выйдет из шара через данную площадку $d\sigma$. Обозначим эту вероятность через $P(x, y, z)\,d\sigma$, причем x, y, z — суть декартовые координаты точки M (измеряемые, как и R, в единицах оптической длины) относительно любой такой системы координат, начало которой совпадает с центром шара, а ось z проходит через площадку $d\sigma$.

Знание функции $P(x, y, z)$ позволяет определить распределение по поверхности сферы ∂S_R выходящего из среды излучения при произвольном распределении внутренних и внешних источников.

Рассуждения, обычные для применения вероятностного метода В. В. Соболева (см. [1]), приводят нас к следующему интегральному уравнению относительно функции $P(x, y, z)$:

$$P(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{(R-z)\, e^{\sqrt{x^2+y^2+(R-z)^2}}}{[x^2+y^2+(R-z)^2]^{3/2}} + \\ + \frac{\lambda}{4\pi} \int\limits_{S_R} \frac{e^{-\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} P(x', y', z')\, dv', \tag{1}$$

где λ — вероятность выживания кванта при элементарном акте рассеяния. В уравнении (1) перейдем к сферическим координатам

$$(x, y, z) \to (r, \varphi, \theta); \quad (x', y', z') \to (r', \varphi', \theta'). \tag{2}$$

Функция $P(x, y, z)$ не зависит от φ. Уравнение (1) в сферических координатах записывается в виде

$$Q(r, \mu) = \frac{\lambda}{2} F(r, R, \mu) + \frac{\lambda}{4\pi} \int\limits_0^R dr' \int\limits_{-1}^{1} Q(r', \mu')\, d\mu' \int\limits_0^{2\pi} K(r, r', u)\, d\varphi', \tag{3}$$

где

$$\mu = \cos\theta, \quad \mu' = \cos\theta', \quad u = \mu\mu' + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)} \cos(\varphi - \varphi'), \tag{4}$$

$$Q(r, \mu) = 2\pi r P(x, y, z), \tag{5}$$

$$F(r, R, \mu) = \frac{r(R - r\mu)\, e^{-\sqrt{r^2+R^2-2rR\mu}}}{(r^2+R^2-2rR\mu)^{3/2}}, \tag{6}$$

$$K(r, r', u) = \frac{rr' e^{-\sqrt{r^2+r'^2-2rr'u}}}{r^2+r'^2-2rr'u}. \tag{7}$$

Представим функции $F(r, R, \mu)$ и $K(r, r', u)$ в виде суммы разложений по полиномам Лежандра от μ и u, соответственно,

$$F(r, R, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(r, R)\, P_i(\mu), \tag{8}$$

$$K(r, r', u) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i(r, r')\, P_i(u), \tag{9}$$

имеем

$$F_i(r, R) = \left(i + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} F(r, R, \mu) P_i(\mu)\, d\mu, \tag{10}$$

$$K_i(r, r') = \left(i + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} K(r, r', u) P_i(u)\, du. \tag{11}$$

Простой заменой переменных под знаками интегралов (10) и (11) функции F_i и K_i можно выразить через элементарные функции и интегральные показательные функции E_1, E_2.

Пользуясь (9) и (4), на основании теоремы сложения для полиномов Лежандра, функцию $K(r, r', u)$ можно представить в виде

$$K(r, r', u) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathfrak{Q}_m(r, r', \mu, \mu') \cos m(\varphi - \varphi'), \tag{12}$$

где

$$\mathfrak{Q}_m(r, r', \mu, \mu') = \sum_{i=m}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \frac{(i-m)!}{(i+m)!} K_i(r, r') P_i^m(\mu) P_i^m(\mu'), \tag{13}$$

$P_i^m(\mu)$ — суть присоединенные функции Лежандра, $P_i^0(\mu) = P_i(\mu)$. Подставляя (12) в (3), учитывая (13), при $m = 0$ получаем

$$Q(r, \mu) = \frac{\lambda}{2} \sum_{i=0}^{\infty} P_i(\mu) Q_i(r, R), \tag{14}$$

где

$$Q_i(r, R) = F_i(r, R) + \int_0^R K_i(r, r')\, dr' \int_{-1}^{1} P_i(\mu') Q(r', \mu')\, d\mu'. \tag{15}$$

С учетом ортогональности полиномов Лежандра на (—1, 1), из (14) и (15) получаются следующие отдельные интегральные уравнения с симметрическими ядрами для определения функций $Q_i(r, R)$:

$$Q_i(r, R) = F_i(r, R) + \frac{\lambda}{2}\int_0^R K_i(r, r') Q_i(r', R)\, dr'. \tag{16}$$

В уравнениях (16) отмечена зависимость решений Q_i от верхнего предела интегрирования R, фигурирующего также в выражениях свободных членов F_i. Для решения уравнений (16) применяем предложенный автором метод решения интегральных уравнений с симметрическими ядрами [2]. Применение этого метода позволяет свести решение уравнения (16) (при заданном i) к последующему решению следующих уравнений:

$$\psi_i(r, \rho) = K_i(r, \rho) + \frac{\lambda}{2}\int_0^r \psi_i(r', r)\,\psi_i(r', \rho)\,dr'; \tag{17}$$

$$V_i(r, \rho) = \psi_i(r, \rho) + \frac{\lambda}{2}\int_r^\rho \psi_i(r', \rho)\,V_i(r, r')\,dr'; \tag{18}$$

$$\varphi_i(r, \rho) = F_i(r, \rho) + \frac{\lambda}{2}\int_0^r \psi_i(r', r)\,\varphi_i(r', \rho)\,dr'. \tag{19}$$

Уравнения (17)—(19), легко решаемые численно, принадлежат вольтерровскому типу, причем уравнение (17) нелинейное, а уравнения (18) и (19) — линейные. В последних двух r и ρ, соответственно, играют роль параметра.

Функции $Q_i(r, R)$ выражаются через V_i и φ_i

$$Q_i(r, R) = \varphi_i(r, R) + \int_r^R \varphi_i(r', R)\,V_i(r, r')\,dr'. \tag{20}$$

Предложенный подход к решению поставленной задачи допускает распространение на следующие случаи: определение распределения выходящего из среды излучения также по направлениям; некогерентное рассеяние; нестационарное поле излучения; учет некоторых радиальных неоднородностей среды и наличие внутренней полости и т. д. Рассмотрению этих обобщений и некоторым применениям полученных результатов будет посвящена отдельная работа.

Автор выражает глубокую благодарность академику В. А. Амбарцумяну за ценное обсуждение.

The scattering of light in a sphere with arbitrary source distribution. The problem of coherent and isotropic scattering of light in homogeneous sphere with arbitrary distribution of sources has been discussed. The solution of this problem is reduced to integral equations

with symmetrical kernels. One can solve these equation by the application of the authors method.

24 февраля 1971

Институт математики
АН Армянской ССР

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. В. Соболев*, Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
2. *Н. Б. Енгибарян*, ДАН СССР, 203, 19, 1972.